Matematická analýza I

Zápisky z přednášek Stanislava Hencla* na MFF UK, zimní semestr, ak. rok 2007/2008

Adam Liška†

12. ledna 2016

*http://www.karlin.mff.cuni.cz/~hencl/
†http://www.adliska.com

Obsah

1 Úvod

1.1 Výroková a predikátová logika

Výroková a predikátová logika je věda o pravdivosti výroků. Výrok je tvrzení, u kterého můžeme rozhodnout, zda-li je pravdivé nebo nikoliv.

Definice 1.1. Výroková funkce je výrok, do něhož dosazujeme proměnné.

Poznámka 1.2 (Příklady výrokových funkcí)**.**

- $A(x) : x < 3$. $A(1)$ je pravda, $A(3)$ je lež.
- $B(x, y) : x < y$. $B(1, 2)$ je pravda, $B(5, 2)$ je lež.

Poznámka 1.3 (Úmluva ohledně zápisu výroků)**.**

- Zápisem $\forall x \in \mathbb{R}; x > 10 : A(X)$ budeme rozumět výrok $\forall x \in \mathbb{R} : (x > 10 \implies A(X))$.
- Zápisem $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : B(x, y)$ budeme rozumět výrok $\forall x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R} : B(x, y))$.

Poznámka 1.4 (Pořadí kvantifikátorů)**.** Na pořadí kvantifikátorů záleží, to jest zápisy

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : B(x, y)$$

a

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : B(x, y)$$

vyjadřují dva rozdílné výroky.

1.2 Základní metody důkazů

1.2.1 Důkaz sporem

Naším cílem je dokázat výrok A. V důkazu sporem se prokáže, že výrok $\neg A$ vede ke sporu. Díky zákonu o vyloučení třetího tedy odvodíme, že výrok A musí být pravdivý.

Mějme například následující výrok A:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n^2 \text{ je liché} \implies n \text{ je liché}).$$

Nyní ukážeme, že výrok $\neg A$:

$$\exists n \in \mathbb{N} : (n^2 \text{ je liché} \wedge n \text{ je sudé})$$

vede ke sporu. Tedy, pokud je n sudé a n^2 liché, potom jejich součet, $n + n^2$, je také lichý. To nicméně vede ke sporu, jelikož $n + n^2 = n(n + 1)$ je součin dvou po sobě následujících čísel, z nichž jedno je liché a jedno sudé. Součin sudého a lichého čísla je vždy sudé číslo.

1.2.2 Nepřímý důkaz

Naším cílem je dokázat implikaci typu $A \implies B$. Někdy je ovšem jednodušší dokázat ekvivalentní výrok tvaru $\neg B \implies \neg A$. V našem příkladě budeme tedy dokazovat výrok:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n \text{ je sudé} \implies n^2 \text{ je sudé}).$$

Vyjádřeme n jako $2k$. Potom $n^2 = 4k$, což je sudé číslo.

1.2.3 Přímý důkaz

Přímý důkaz implikace $A \implies B$ spočívá v nalezení řady výroků tvaru:

$$A \implies C_1, C_1 \implies C_2, \ldots, C_{n-1} \implies C_n, C_n \implies B.$$

V našem případě můžeme vyjádřit číslo n jako součin $p_1 \ldots p_k$. Potom $n^2 = p_1^2 \ldots p_k^2$. Pokud je číslo n^2 liché, potom žádný činitel z $p_1^2 \ldots p_k^2$ neobsahuje číslo 2, a tedy žádný činitel z $p_1 \ldots p_n$ neobsahuje číslo 2 a tedy číslo $n = p_1 \ldots p_k$ je liché.

1.2.4 Matematická indukce

Matematickou indukci využijeme v případě, kdy chceme dokázat platnost výroku pro všechna přirozená čísla, či případně pro jinou, předem danou nekonečnou posloupnost, např. pro všechna přirozená čísla větší než 5.

V prvním kroce důkazu matematickou indukcí se ukáže, že tvrzení platí pro nejmenší přirozené číslo k. V indukčním kroce se dokáže, že pokud tvrzení platí pro $n = m$, pak platí i pro $n = m + 1$. Dle principu matematické indukce pak tvrzení platí pro každé přirozené číslo větší nebo rovno k.

Jako příklad dokážeme následující dvě věty.

Věta 1.5 (Bernoulliho nerovnost)**.** *Nechť* $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Potom:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Důkaz.

I. Pro $n = 1$ zřejmě platí: $(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x$.

II. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = m$ a pokusme se jej dokázat pro $n = m + 1$. Tedy:

$$\begin{aligned}
(1 + x)^{m+1} &= (1 + x)(1 + x)^m \\
&\geq (1 + x)(1 + mx) && \text{(dle indukčního předpokladu)} \\
&= 1 + x + mx + mx^2 \\
&= 1 + (m + 1)x + mx^2 \\
&\geq 1 + (m + 1)x && \text{(jelikož } mx^2 \geq 0\text{)}
\end{aligned}$$

$\square$

Věta 1.6 (Vztah aritmetického a geometrického průměru)**.** *Aritmetický průměr nezáporných čísel je vždy větší nebo roven geometrickému průměru.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že toto tvrzení platí pro jedno číslo, $V(1)$. Poté ukážeme, že $V(n) \implies V(2n)$. Nakonec ukážeme, že $V(n+1) \implies V(n)$. Tím je důkaz ukončen.

Základní krok je jednoduchý:

$$\frac{x_1}{1} = \sqrt[1]{x_1}$$

Jednoduše se ukáže i platnost výroku $V(2)$:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \iff x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0 \iff (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$$

Nyní ukážeme platnost tvrzení $V(n) \implies V(2n)$:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}}{2} \\
&\geq \frac{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}}{2} && \text{(indukční předpoklad } V(n)\text{)} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}\sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}} && (V(2)) \\
&= \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}
\end{aligned}$$

Zbývá dokázat platnost tvrzení: $V(n+1) \implies V(n)$. Mějme čísla $x_1, \ldots, x_n > 0$. Položme $y_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}$ pro $i = 1, \ldots, n$, a $y_{n+1} = 1$. Dle předpokladu:

$$\begin{aligned}
\frac{y_1 + \cdots + y_{n+1}}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{y_1 \ldots y_{n+1}} \\
&= \sqrt[n+1]{\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}} \cdots \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}} \cdot 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Potom:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}} + 1}{n+1} &\geq 1 \\
\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}} &\geq n \\
\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}
\end{aligned}$$

$\square$

1.3 Množina reálných čísel

Ze střední školy známe množiny:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Tyto množiny nicméně neobsahují všechna čísla, se kterými pracujeme.

Věta 1.7. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Důkaz. Sporem. Nechť $\exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná taková, že

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Potom $2q^2 = p^2$, p^2 je sudé a p musí být taktéž sudé: $\exists k \in \mathbb{Z} : p = 2k$ a $2q^2 = 4k^2$. Z toho vyplývá, že q je také sudé, čímž dostáváme spor s nesoudělností p a q. □

Poznámka 1.8 (Vlastnosti reálných čísel I.)**.** Na množině $\mathbb{R}$ je dána binární relace $\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, operace sčítání $(+)$, násobení $(\cdot)$ a význačné prvky $0, 1$ tak, že platí:

i. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání)

ii. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (komutativita sčítání)

iii. $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ (existence 0)

iv. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$ (existence opačného prvku při sčítání)

v. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení)

vi. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení)

vii. $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$ (existence 1)

viii. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$ (existence opačného prvku při násobení)

ix. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = xy + xz$ (distributivita)

Poznámka 1.9 (Vlastnosti reálných čísel II.)**.**

i. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$

ii. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z$

iii. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \vee (y \leq x)$

iv. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \le y) \implies x + z \le y + z$

v. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (0 \le x \wedge 0 \le y) \implies 0 \le xy$

Definice 1.10. Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená shora (zdola), pokud existuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall y \in M : y \le x$ ($y \ge x$). Číslo x nazýváme horní (dolní) závora množiny M.

Definice 1.11. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazveme supremum M (nejmenší horní závora) a značíme $\sup M$, pokud:

i. $\forall x \in M : x \le s$ (s je horní závora M)

ii. $\forall y < s \in \mathbb{R} : \exists x \in M : y < x$ (s je nejmenší horní závora)

Poznámka 1.12 (Vlastnosti reálných čísel III.)**.** Nechť množina $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená. Pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti I., II. a III. určují jednoznačně množinu reálných čísel.

Definice 1.13. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $i \in \mathbb{R}$ nazveme infimem, pokud:

i. $\forall x \in M : x \ge i$ (i je dolní závora)

ii. $\forall y > i \in \mathbb{R} : \exists x \in M : x < y$ (i je největší dolní závora)

Věta 1.14 (O existenci infima)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená. Pak existuje* $\inf M \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Definujme $-M = \{-x; x \in M\}$. Tato množina je neprázdná shora omezená a tedy existuje $s = \sup(-M)$. Označíme $i = -s$ a ukážeme, že $i = \inf M$:

i. $x \in -M, x \le s \implies \tilde{x} = -x, \tilde{x} \in M, -\tilde{x} \le -i, \tilde{x} \ge i$

ii. $\forall y \in \mathbb{R}, y < s : \exists x \in M : y < x \implies \tilde{x} = -x, \tilde{y} = -y, \forall \tilde{y} \in \mathbb{R}, \tilde{y} > -s = i : \exists \tilde{x} \in M : -\tilde{y} < -\tilde{x} \implies \tilde{y} > \tilde{x}$

□

Věta 1.15 (Archimédova vlastnost)**.** $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

Důkaz. Sporem. $\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x \ge n \implies \exists s = \sup \mathbb{N}$, tedy $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \le s$ a tedy $n \le s - 1$. Číslo $s - 1$ je také horní zavorou $\mathbb{N}$, což je spor s definicí s jako nejmenší horní zavory $\mathbb{N}$. □

Věta 1.16 (Hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R}$ takové, že $q \in (a, b), r \in (a, b)$.*

Důkaz. Díky Archimédově vlastnosti (Věta 1.15) existuje $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$ a tedy $b - a > \frac{1}{n}$. Vezměme za m nejmenší přirozené číslo větší než na. Potom $\frac{m}{n} = q \in (a, b)$.

Proč? Hledáme m takové, že $a < \frac{m}{n} < b$, tj. $na < m < nb$. Jelikož jsme vybrali m jako nejmenší přirozené číslo větší než na, platí: $m - 1 \leq na < m$. Z pravé části nerovnice přímo plyne $a < \frac{m}{n}$. Dále platí:

$$\begin{aligned} m &\leq na + 1 \\ &< n\left(b - \frac{1}{n}\right) + 1 && \text{(plyne z } n > \tfrac{1}{b-a}\text{)} \\ &= nb \end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali větu o hustotě racionálních čísel v $\mathbb{R}$. Rozšíření na iracionální čísla je jednoduché: Mějme $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 < q_2 \in (a, b)$. Položme $r = q_1 + \sqrt{2}\left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)$. Zřejmě $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Věta 1.17 (O existenci n-té odmocniny)**.** *Nechť $x \in [0; +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje právě jedno $y \in [0; +\infty)$ takové, že $y^n = x$.*

Důkaz. Definujme dvě množiny, M_1 a M_2 následovně:

- $M_1 = \{a \in [0; +\infty) : a^n \leq x\}$. Tato množina je neprázdná a shora omezená, tedy existuje $y_1 = \sup M$.
- $M_2 = \{a \in [0; +\infty) : a^n \geq x\}$. Tato množina je neprázdná a zdola omezená, tedy existuje $y_2 = \inf M$.

Pozorování: $y_1 \geq y_2$. Pokud by tomu tak nebylo, potom existuje $q \in \mathbb{R} : y_1 < q < y_2$ a buď $q^n \leq x$ nebo $x \leq q^n$. Obě možnosti vedou ke sporu s definicemi suprema či infima.

Tvrdím: $y_1^n \leq x$ a $y_2^n \geq x$. Tvrzení dokážeme sporem. Vezměme libovolné $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k > \frac{ny_1^{n-1}}{y_1^n - x}$. Z definice suprema víme, že pro $y_1 - \frac{1}{k}$ existuje $a \in M_1 : a > y_1 - \frac{1}{k}$. Potom dostáváme spor:

$$\begin{aligned} y_1^n - x &\leq y_1^n - a^n && (a \in M_1 \text{ a tedy } a^n \leq x) \\ &= (y_1 - a)(y_1^{n-1} + y_1^{n-2}a + \cdots + y_1 a^{n-2} + a^{n-1}) \\ &\leq (y_1 - a) n y_1^{n-1} && (\text{jelikož } y_1 \geq a) \\ &< \frac{1}{k} n y_1^{n-1} && (\text{vzpomeňme } a > y_1 - \tfrac{1}{k}) \\ &< y_1^n - x \end{aligned}$$

Podobně lze ukázat, že $y_2^n \geq x$, čímž dostáváme dvě sady nerovností:

- $y_1 \geq y_2$, a
- $y_1^n \leq x \leq y_2^n$.

Zřejmě $x = y_1^n = y_2^n$. $\square$

Definice 1.18. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme absolutní hodnotu $|x|$ následovně:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

Věta 1.19 (Vlastnosti absolutní hodnoty)**.**

i. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$,

ii. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \iff x = 0$,

iii. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq |x|$,

iv. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x||y|$,

v. $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ *(rozšířená trojúhelníková nerovnost).*

Důkaz. První čtyři vlastnosti jsou zřejmé: Postačí jednoduché rozepsání případů ($x \geq 0$, $x < 0$, $y \geq 0$, $y < 0$) či jejich kombinací.

Dokažme nyní poslední vlastnost. Z předchozích bodů vyplývá:

$$-2|x||y| \leq 2xy \leq 2|x||y|.$$

Přičtěme v nerovnostech výraz $|x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$:

$$|x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

Tyto nerovnosti můžeme dále upravit:

$$(|x| - |y|)^2 \leq (x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

Jelikož platí:

$$|a| \leq |b| \iff a^2 \leq b^2,$$

dostáváme:

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq ||x| + |y|| = |x| + |y|.$$

Pokud dále dosadíme $-y$ za y, dostaneme:

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

$\square$

2 Posloupnosti

2.1 Úvod

Definice 2.1. Nechť pro $\forall n \in \mathbb{N}$ máme dáno $a_n \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ nazveme posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazveme n-tým prvkem posloupnosti.

Poznámka 2.2 (Příklady posloupností)**.**

- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

  Tedy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, atd.
- $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde p_n je n-té prvočíslo.
- $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + a_n^2$.

  Tato posloupnost je zadána rekursivně.

Definice 2.3. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, pokud je množina členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ omezená množina. Analogicky definujeme omezenost shora a omezenost zdola.

Definice 2.4. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je:

- neklesající, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$,
- nerostoucí, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$,
- rostoucí, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$,
- klesající, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 2.5. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekneme, že A je vlastní limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Poznámka 2.6 (Příklady limit)**.**

- Mějme posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost zřejmě směřuje k nule, formálně:

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

  Dle definice limity musí platit:

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$$

  Pro dané ε volíme $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pro všechna $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ platí: $\frac{1}{n} < \varepsilon$, a tedy: $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

  Sporem: Nechť daná limita neexistuje, tedy:

  $$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \geq n_0 : |\sqrt[n]{n} - 1| \geq \varepsilon.$$

  Jelikož $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{n} \geq 1$, vyplývá, že $\sqrt[n]{n} \geq 1 + \varepsilon$. Potom ovšem:

  $$\begin{aligned} n &\geq (1+\varepsilon)^n \\ &\geq 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 && \text{(první tři členy binomického rozvoje)} \\ &\geq n\varepsilon(1 + \frac{n-1}{2}\varepsilon) \end{aligned}$$

  Po vydělení obou stran číslem n dostáváme:

  $$1 \geq \varepsilon(1 + \frac{n-1}{2}\varepsilon)$$

  což očividně pro příliš velká $n \in \mathbb{N}$ nemůže platit.

- $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje.

  Sporem: Předpokládejme, že daná limita A existuje, tj.:

  $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |(-1)^n - A| < \varepsilon$$

  Ukážeme, že existuje protipříklad. Nechť $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom dostáváme následující spor:

  $$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^n - (-1)^{n+1}| \\ &\leq |(-1)^n - A| + |A - (-1)^{n+1}| && \text{(trojúhelníková nerovnost)} \\ &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} && \text{(z definice limity pro } \forall n \geq n_0) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Věta 2.7 (jednoznačnost vlastní limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Nechť má posloupnost $\{a_n\}$ dvě různé limity, A_1 a A_2. Bez újmy na obecnosti: $A_1 < A_2$. Zvolíme $0 < \varepsilon < \frac{A_2 - A_1}{2}$. Z definice víme, že existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že: $\forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \varepsilon$ a $\forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \varepsilon$. Vezměme $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_2)$. Potom dostáváme následující spor:

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 : A_2 - A_1 &= |A_2 - A_1| \\ &\leq |A_2 - a_n| + |a_n - A_1| && \text{(trojúhelníková nerovnost)} \\ &< 2\varepsilon && \text{(z definice limity)} \\ &< A_2 - A_1 && \text{(díky volbě } \varepsilon < \tfrac{A_2 - A_1}{2}) \end{aligned}$$

□

Věta 2.8. *Nechť posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu $A \in \mathbb{R}$. Pak je množina $\{a_n\}$ omezená.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon = 1$. Dle definice limity:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < 1.$$

Pro všechna $n \geq n_0$ potom platí:

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Nyní zvolme

$$K \coloneqq \max\{|A| + 1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}.$$

Zřejmě: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$. □

Definice 2.9. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $b_k = a_{n_k}$.

Poznámka 2.10 (Příklad vybrané posloupnosti)**.**

- Posloupnost $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ je vybraná z posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Věta 2.11 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *a nechť* $\{b_k\}$ *je vybraná z* $\{a_n\}$*. Potom* $\lim_{n\to\infty} b_k = A$*.*

Důkaz. Z definice limity víme, že:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

K tomuto ε volíme $k_0 \coloneqq n_0$. Potom $\forall k \geq k_0, k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k \geq n_0$ a tedy $|b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon$. □

Poznámka 2.12. Předchozí implikace neplatí v opačném směru. Uvažujte například posloupnost $\{(-1)^n\}$ a její možné vybrané posloupnosti.

Věta 2.13 (Aritmetika limit)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$*. Pak platí:*

i. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$

ii. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

iii. pokud $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$ *a* $B \neq 0$*, pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$*.*

Důkaz.

i. Z definice limity dostáváme:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2, n \in \mathbb{N} : |b_n - B| < \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$. Potom:

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n + b_n - (A + B)| &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

ii. Mějme $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$ jako v předchozím bodě. Potom:

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n b_n - AB| &\leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &\leq |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A| \\ &< |a_n|\varepsilon + |B|\varepsilon\end{aligned}$$

Z Věty 2.8 víme, že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, tj. $\exists K\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$, a tedy:

$$|a_n|\varepsilon + |B|\varepsilon \leq \varepsilon(K + |B|).$$

iii. Mějme n_1 a n_2 jako v předchozích bodech. Navíc, pro $\tilde{\varepsilon} = \frac{|B|}{2}$:

$$\exists n_3 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_3, n \in \mathbb{N} : |b_n - B| < \frac{|B|}{2}.$$

Dle rozšířené trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.19) dále platí:

$$|b_n - B| \geq ||b_n| - |B|| \geq |b_n| - |B|.$$

a tedy:

$$\forall n \geq n_3, n \in \mathbb{N} : |b_n| > \frac{|B|}{2}.$$

Zvolme $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2, n_3\}$, potom

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_n B - AB}{b_n B}\right| + \left|\frac{AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &\leq \frac{|B||a_n - A|}{|b_n||B|} + \frac{|A||B - b_n|}{|b_n||B|} \\ &< \frac{\varepsilon}{\frac{|B|}{2}} + \frac{|A|\varepsilon}{\frac{|B|}{2}|B|} && \text{(jelikož } |b_n| > \tfrac{|B|}{2}\text{)} \\ &= \varepsilon\left(\frac{2}{|B|} + \frac{2|A|}{|B|^2}\right)\end{aligned}$$

□

Věta 2.14 (Limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

i. Jestliže $A < B$, *pak* $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < b_n$.

ii. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$, *pak* $A \geq B$.

Důkaz.

i. Zvolme $0 < \varepsilon < \frac{B-A}{2}$. Dle definice limity:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2, n \in \mathbb{N} : |b_n - B| < \varepsilon$$

Položmě $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$. Potom:

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 : a_n &< A + \varepsilon \\ &< B - \varepsilon && (0 < \varepsilon < \tfrac{B-A}{2}) \\ &< b_n \end{aligned}$$

ii. Sporem: Nechť A < B. Potom dle předchozího bodu:

$$\exists \widetilde{n_0} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \widetilde{n_0} : a_n < b_n,$$

což je ve sporu s předpoklady.

□

Věta 2.15 (O dvou strážnících)**.** *Nechť* $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ *jsou posloupnosti splňující:*

i. $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,

ii. $\lim a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\lim c_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Dle definice limity:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2, n \in \mathbb{N} : |b_n - A| < \varepsilon$$

Položme $n_3 \coloneqq \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Potom:

$$\forall n \geq n_3 : A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

tedy $\forall n \geq n_3 : |c_n - A| < \varepsilon$, a proto $\lim c_n = A$. □

Poznámka 2.16 (Příklad využití věty o dvou strážnících)**.** Pomocí předchozí věty dokážeme následující tvrzení:

> Nechť $a > 0$. Pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Podle hodnoty a rozdělíme důkaz do tří částí:

($a = 1$) Triviální.

($a > 1$) Zřejmě:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq a, \forall n \geq n_0 : a \leq n.$$

Potom:

$$\forall n \geq n_0 : 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Jelikož $\lim 1 = 1$ a $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (Poznámka 2.6), potom dle věty o dvou strážnících i $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

($0 < a < 1$) S pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.13) převedeme problém na již vyřešený případ $a > 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} && \text{(aritmetika limit)} \\ &= \frac{1}{1} = 1 && (\tfrac{1}{a} > 0) \end{aligned}$$

Věta 2.17 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Důkaz. Posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, tedy $\exists K : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq K$. Potom:

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq K|a_n|$$

a s pomocí dvou strážníků (Věta 2.15) je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. □

Poznámka 2.18. Předchozí větu můžeme využít např. při důkazu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice 2.19. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má nevlastní limitu $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud:

$$\forall K \in \mathbb{R}\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K$$

$$(\forall K \in \mathbb{R}\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n < K)$$

Poznámka 2.20 (Příklady nevlastních limit)**.**

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

  Ke $K \in \mathbb{R}$ zvol $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \sqrt{K}$. Pak $\forall n \geq n_0 : n \geq n_0 \geq \sqrt{K}$, a tedy: $n^2 > K$.

- $\lim_{n\to\infty} -\sqrt{n} = -\infty$

  Ke $K \in \mathbb{R}$ zvol $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > K^2$. Pak $\forall n \geq n_0 : \sqrt{n} > -K$, a tedy $-\sqrt{n} < K$.

Definice 2.21. Nechť $\lim a_n = A$. Pokud $A \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje. Pokud $A = \pm\infty$, říkáme, že posloupnost diverguje.

Metatvrzení 2.22. *Věty 2.7, 2.11, 2.14 a 2.15 platí i v případě, že uvažujeme nevlastní limity.*

Důkaz. Důkazy zmíněných vět je třeba rozepsat pro jednotlivé případy: vlastní limita, nevlastní limita, kombinace vlastní a nevlastní limity, atd. $\square$

Definice 2.23. Rozšířená reálná osa je množina $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ s následujícími vlastnostmi:

Uspořádání:	$\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty$
Absolutní hodnota:	$\lvert -\infty\rvert = \lvert +\infty\rvert = +\infty$
Sčítání:	$\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\} : -\infty + a = -\infty$
	$\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\} : +\infty + a = +\infty$
Násobení:	$\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0 : a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
	$\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0 : a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
Dělení:	$\forall a \in \mathbb{R} : \frac{a}{\pm\infty} = 0$

Výrazy $-\infty + \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\text{cokoli}}{0}$ nejsou definovány.

Definice 2.24 (Rozšíření definice suprema a infima)**.**

- Pokud množina M není shora omezená, potom $\sup M = +\infty$.
- Pokud množina M není zdola omezená, potom $\inf M = -\infty$.
- Pokud $M = \emptyset$, potom $\sup M = -\infty$ a $\inf M = +\infty$.

Poznámka 2.25. Všimněte si, že při $M = \emptyset$ je $\inf M > \sup M$.

Věta 2.26 (aritmetika limit podruhé)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Pak platí:*

i. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

ii. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$, *pokud je výraz* AB *definován, a* *iii. pokud* $B \neq 0$ *a* $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, *pokud je výraz* $\frac{A}{B}$ *definován.*

Důkaz. Tato věta je rozšířením původní věty o aritmetice limit (Věty 2.13), ve které jsme uvažovali pouze vlastní limity.

Jako příklad podívejme na důkaz bodu (i) a případ $A = +\infty, B \in \mathbb{R}$.

K $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N} : |b_n - B| < 1,$$

a tedy $\forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N} : b_n > B - 1$. Dále, ke $K \in \mathbb{R}$:

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, n \in \mathbb{N} : a_n > K - B + 1.$$

Zvolme $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$, potom:

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n + b_n > K - B + 1 + B - 1 = K.$$

$\square$

Věta 2.27 (Limita typu $\frac{A}{0}$)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, A > 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : b_n > 0$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Poznámka 2.28.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}}$ neexistuje, jelikož porušuje podmínku $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : b_n > 0$.

Důkaz. Uvažujme případ, kdy $A \in \mathbb{R}$, tedy $\lim a_n$ je vlastní. Pro $\varepsilon = \frac{A}{2}$ platí:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{A}{2},$$

a tedy $\forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N} : a_n > \frac{A}{2}$. Zvolme $K > 0$ pevné, potom k $\varepsilon = \frac{\frac{A}{2}}{K}$:

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, n \in \mathbb{N} : |b_n| < \frac{\frac{A}{2}}{K}.$$

Zvolme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Potom:

$$\forall n \geq n_3, n \in \mathbb{N} : \frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{A}{2}}{\frac{\frac{A}{2}}{K}} = K.$$

$\square$

2.4 Monotónní posloupnosti

Věta 2.29 (O limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Důkaz. Nechť je bez újmy na obecnosti posloupnost $\{a_n\}$ neklesající. Položme

$$A = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Tvrdím, že $\lim a_n = A$.

i. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Z definice suprema:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > A - \varepsilon.$$

Potom $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} A &\geq a_n && \text{(supremum)} \\ &\geq a_{n_0} && \text{(motononie)} \\ &> A - \varepsilon \end{aligned}$$

a tedy $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$

ii. Nechť $A = +\infty$ a $K \in \mathbb{R}$. Z definice suprema:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > K.$$

Potom $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} a_n &\geq a_{n_0} && \text{(monotonie)} \\ &> K. \end{aligned}$$

□

Poznámka 2.30 (Příklad využití Věty 2.29)**.** Určeme limitu (pokud existuje) rekursivně zadané posloupnosti $\{x_n\}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_{n+1} &= \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \end{aligned}$$

Dokažme nejprve, že $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 0$; toto pozorování se nám bude hodit později. Využijeme indukci:

- Pro $n = 1$ platí $x_1 = 2 > 0$.
- Nechť $x_n > 0$. Potom $\frac{x_n^2+2}{2x_n}$ je zřejmě také větší než 0, jelikož jak čitatel, tak jmenovatel jsou větší než 0.

Nyní dokažme, že daná posloupnost $\{x_n\}$ je nerostoucí, tj. $\forall n \in N : x_{n+1} \leq x_n$. Pro $x_n > 0$ je tato nerovnost ekvivalentní:

$$\begin{aligned} \frac{x_n^2+2}{2x_n} &\leq x_n \\ x_n^2+2 &\leq 2x_n^2 \\ 2 &\leq x_n^2 \\ \sqrt{2} &\leq x_n \end{aligned}$$

Je třeba tedy dokázat tvrzení: $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq \sqrt{2}$. Využijme znovu indukci:

- Pro $n = 1$ platí: $2 \geq \sqrt{2}$.
- Nechť $x_n \geq \sqrt{2}$. Potom:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n^2+2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^2+2}{2} \cdot \frac{1}{x_n} \\ &\geq \sqrt{2x_n^2} \cdot \frac{1}{x_n} && \text{(vztah aritmetického a geometrického průměru, Věta 1.6)} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Potud jsme o posloupnosti $\{x_n\}$ dokázali, že je:

- nerostoucí – a podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.29) má tedy limitu,
- zdola omezená – a tedy její limita je vlastní.

Označme tuto limitu A (tedy: $\lim_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R}$). Potom platí:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} && \text{(Věta 2.11 a } b_k = x_{k+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{2x_n} \\ &= \frac{\lim x_n \cdot \lim x_n + \lim 2}{2 \lim x_n} && \text{(Věta 2.13)} \\ &= \frac{A \cdot A + 2}{2A} \end{aligned}$$

Vyřešením této rovnice získáme $A = \sqrt{2}$.

Definice 2.31. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost a označme

$$b_k = \sup\{a_n, n \geq k\},$$

$$c_k = \inf\{a_n, n \geq k\}.$$

Je-li $\{a_n\}$ shora (zdola) neomezená, pak klademe $\lim_{k\to\infty} b_k = \infty$ ($\lim_{k\to\infty} c_k = -\infty$).

Potom:

- Číslo $\lim_{k\to\infty} b_k$ nazýváme limes superior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\limsup_{n\to\infty} a_n$.
- Číslo $\lim_{k\to\infty} c_k$ nazýváme limes inferior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Poznámka 2.32. Nechť $\{a_n\}$ je libovolná posloupnost. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují, jelikož $\{b_k\}$ a $\{c_k\}$ jsou monotónní posloupnosti, které dle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.29) mají limitu.

Věta 2.33 (vztah limity, limes superior a limes inferior)**.**

$$\lim a_n = A \in \mathbb{R}^* \iff \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$$

Důkaz.

$\Longleftarrow$ Nechť jsou b_k a c_k definovány jako v předchozí definici. Potom:

$$\forall k \in \mathbb{N} : c_k \leq a_k \leq b_k,$$

Jelikož $\lim c_k = \lim b_k = A \in \mathbb{R}^*$, s použitím Věty 2.15 o dvou strážnících je i $\lim a_k = A$.

$\Longrightarrow$ Nechť $A \in \mathbb{R}$. Z definice limity víme:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Zřejmě také platí:

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : A - \varepsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n \leq A + \varepsilon,$$

a proto $\lim b_n = \lim c_n = A$.

Nechť naopak $A = +\infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená a $\limsup a_n = +\infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z definice limity:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K.$$

Potom $c_{n_0} \geq K$. Jelikož posloupnost $\{c_n\}$ je neklesající, platí:

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : c_n \geq K.$$

Zřejmě:

$$\lim c_n = +\infty.$$

Analogicky pro $A = -\infty$.

$\square$

Věta 2.34 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Mějme posloupnost $\{a_n\}$. Jelikož je omezená, platí:

$$\exists K, L \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : K \leq a_n \leq L.$$

Rozpůlme interval $[K, L]$ na dva nové intervaly: $[K, \frac{K+L}{2}], [\frac{K+L}{2}, L]$ (bod $\frac{K+L}{2}$ leží v obou intervalech). Potom alespoň jeden z nových intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$. Tento interval označíme $[K_1, L_1]$ a znovu jej rozpůlíme na dva podintervaly. Ten, ve kterém se nachází nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, označíme $[K_2, L_2]$.

Tento postup opakujeme a získáme tak posloupnost intervalů $[K_k, L_k]$, pro něž platí:

i. $\forall k \in \mathbb{N} : [K_k, L_k] \supset [K_{k+1}, L_{k+1}]$

ii. $\forall k \in \mathbb{N} : L_k - K_k = (L - K)/2^k$, a tedy velikost intervalů konverguje k nule.

iii. $\forall k \in \mathbb{N} : [K_k, L_k]$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.

Můžeme proto vybrat rostoucí posloupnost přirozených čísel n_k takovou, že $\forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \in [K_k, L_k]$.

Díky vlastnosti (i) posloupnosti intervalů $[K_k, L_k]$:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} : x \in [K_k, L_k].$$

Tvrdím, že posloupnost $\{a_{n_k}\}$ konverguje k x. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \geq k_0, k \in \mathbb{N} : L_k - K_k < \varepsilon.$$

Potom

$$\forall k \geq k_0, k \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - x| < \varepsilon,$$

jelikož jak a_{n_k}, tak x náleží do $[K_k, L_k]$. $\square$

Věta 2.35 (Bolzano-Cauchyho podmínka)**.** *Posloupnost* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *má vlastní limitu, právě když splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku, tedy:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Důkaz.

$\Longrightarrow$ $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Z definice limity:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pro $m, n \geq n_0$ platí:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$ Definujme posloupnosti:

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, ...\},$$
$$c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, ...\}.$$

Posloupnost $\{b_n\}$ klesá k $\limsup a_n$; posloupnost $\{c_n\}$ stoupá k $\liminf a_n$. Dále $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \geq c_n$. V následujícím ukážeme, že $\liminf a_n = \limsup a_n$, z čehož za použití věty o vztahu limity, limes superior a limes inferior (Věta 2.33) plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje.

Cauchyho podmínka říká, že

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Zvolíme $m = n_0$. Potom $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} :$

$$a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$$

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$$
$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$$

a tedy:

$$\forall \varepsilon > 0 : |\limsup a_n - \liminf a_n| \leq 2\varepsilon,$$

z čehož vyplývá, že $\limsup a_n = \liminf a_n$ a posloupnost $\{a_n\}$ konverguje.

$\square$

3 Funkce jedné reálné proměnné

3.1 Základní definice

Definice 3.1. Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení

$$f : M \to \mathbb{R},$$

kde $M \subset \mathbb{R}$.

Definice 3.2. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$ je:

- rostoucí, pokud $\forall x, y \in M, x < y : f(x) < f(y)$,
- klesající, pokud $\forall x, y \in M, x < y : f(x) > f(y)$,
- nerostoucí, pokud $\forall x, y \in M, x < y : f(x) \geq f(y)$,
- neklesající, pokud $\forall x, y \in M, x < y : f(x) \leq f(y)$.

Definice 3.3. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$ je:

- sudá, pokud $\forall x \in M : (-x \in M) \ \& \ (f(x) = f(-x))$,
- lichá, pokud $\forall x \in M : (-x \in M) \ \& \ (f(x) = -f(-x))$,
- periodická, pokud $\exists p > 0, \forall x \in M : (x + p \in M) \ \& \ (x - p \in M) \ \& \ (f(x) = f(x + p))$.

Definice 3.4. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$ je omezená (omezená shora, omezená zdola), jestliže $f(M)$ je omezená (omezená shora, omezená zdola) podmnožina $\mathbb{R}$.

Definice 3.5. Nechť $\delta > 0$ a $a \in \mathbb{R}$. Prstencové okolí bodu je:

$$\begin{aligned} P(a, \delta) &= (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}, \\ P(+\infty, \delta) &= (\frac{1}{\delta}, +\infty), \\ P(-\infty, \delta) &= (-\frac{1}{\delta}, -\infty). \end{aligned}$$

Pravé a levé prstencové okolí bodu a je:

$$\begin{aligned} P_+(a, \delta) &= (a, a + \delta), \\ P_-(a, \delta) &= (a - \delta, a). \end{aligned}$$

Okolí bodu je:

$$\begin{aligned} U(a, \delta) &= (a - \delta, a + \delta), \\ U(+\infty, \delta) &= (\frac{1}{\delta}, +\infty), \\ U(-\infty, \delta) &= (-\frac{1}{\delta}, -\infty). \end{aligned}$$

Pravé a levé okolí bodu a je:

$$U_+(a,\delta) = [a, a+\delta),$$
$$U_-(a,\delta) = (a-\delta, a].$$

Definice 3.6. Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \in U(A,\varepsilon).$$

Značíme:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Poznámka 3.7 (Poznámky k definici limity)**.**

- Funkce f nemusí být v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ definována, aby v něm měla limitu. Z definice limity vyplývá, že pokud $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje, tak je funkce f definována na nějakém prstencovém okolí bodu a.

  Navíc, je-li f v bodě a definována, na hodnotě $f(a)$ nezáleží.

- Pokud $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje a je rovna A, tak potom je buď vlastní ($A \in \mathbb{R}$) nebo nevlastní ($A = \pm\infty$).

- $\lim_{x\to a} f(x)$ je nazývá limitou ve vlastním bodě, pokud $a \in \mathbb{R}$, nebo limitou v nevlastním bodě, pokud $a = \pm\infty$.

Definice 3.8. Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu zprava (zleva) rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a,\delta) : f(x) \in U(A,\varepsilon)$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(a,\delta) : f(x) \in U(A,\varepsilon)).$$

Značíme:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A$$

$$(\lim_{x \to a-} f(x) = A).$$

Pozorování 3.9 (Vztah limity a jednostranných limit)**.** *Nechť* $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*, A \in \mathbb{R}^*$. *Potom:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = A.$$

Poznámka 3.10 (Příklady limit)**.**

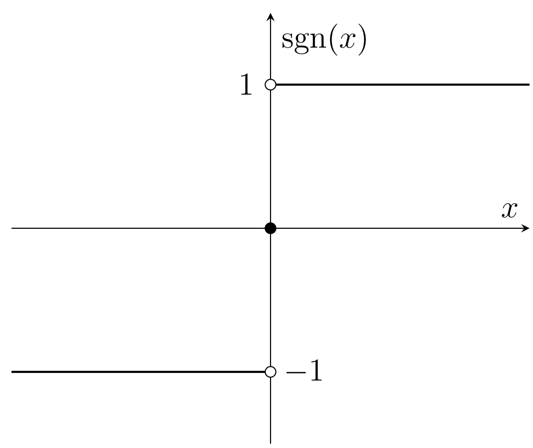
- $f(x) = x$

  Její limita v bodě $a \in \mathbb{R}^*$:
  $$\lim_{x \to a} f(x) = a.$$
  K $\varepsilon > 0$ volme $\delta = \varepsilon$. Potom $f(P(a, \delta)) \subseteq U(a, \varepsilon)$.

- $f(x) = k$

  $\forall a \in \mathbb{R}^* : \lim_{x \to a} f(x) = k$.

- $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$:



  Z grafu je zřejmé, že jednostranné limity se sobě nerovnají:
  $$\lim_{x \to 0+} \mathrm{sgn}(x) = 1,$$
  $$\lim_{x \to 0-} \mathrm{sgn}(x) = -1,$$
  a tedy dle pozorování o vztahu limity a jednostranných limit (Pozorování 3.9) $\lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}(x)$ neexistuje.

- Dirichletova funkce:
  $$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{pokud } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
  Tato funkce nemá limitu nikde, jelikož dle věty o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Věta 1.16) každé prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ obsahuje alespoň jedno racionální a iracionální číslo.

- Riemannova funkce:
  $$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{pokud } x \in \mathbb{Q}, \text{ tj. } x = \frac{p}{q}, \text{ kde } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ a } p, q \text{ jsou nesoudělná}, \\ 0, & \text{pokud } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
  Jako domácí cvičení dokažte:
  $$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} R(x) = 0.$$

Definice 3.11. Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}, a \in M$. Řekneme, že f je v bodě spojitá (spojitá zleva, spojitá zprava), jestliže:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x\to a+} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to a-} f(x) = f(a))$$

Poznámka 3.12 (Příklady spojitých a nespojitých funkcí)**.**

- $f(x) = x$

  Spojitá na $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

  Spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $f(x) = D(x)$, Dirichletova funkce

  Není spojitá v žádném bodě $\mathbb{R}$.

- $f(x) = R(x)$, Riemannova funkce

  Spojitá v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.2 Věty o limitách

Věta 3.13 (Heine)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $f : M \to \mathbb{R}$ a f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

i. $\lim_{x\to a} f(x) = A$

ii. pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takovou, že:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in M, x_n \neq a, a \text{ zároveň} \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Důkaz.

$\implies$ Z definice limity:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \in U(A,\varepsilon).$$

Nechť máme dále posloupnost $\{x_n\}$, jež splňuje podmínky bodu (ii). Jelikož $\lim x_n = a$ a $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a$, tak k $\delta > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : x_n \in P(a,\delta)$$

a tedy

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : f(x_n) \in U(A,\varepsilon).$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

$\Longleftarrow$ Implikaci dokážeme nepřímo, tj. dokážeme tvrzení $\neg(i.) \implies \neg(ii.)$, tedy že z tvrzení, že limita funkce f neexistuje nebo není rovna A, vyplývá existence alespoň jedné posloupnosti $\{x_n\}$, která splňuje zadaná kritéria a zároveň $\lim f(x_n) \neq A$.

Pokud $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje nebo není rovna A, potom

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in P(a, \delta) : f(x) \notin U(A, \varepsilon).$$

Pro $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$ vezmeme takové x a označíme ho x_n.

Zřejmě platí, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Jelikož dané elementy x_n vybíráme z prstencového okolí a, platí, že $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a$. Z definice této posloupnosti navíc vyplývá, že $\forall n \in \mathbb{N} : f(x_n) \notin U(A, \varepsilon)$, takže $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$. Tím je implikace splněna.

□

Věta 3.14 (o jednoznačnosti limity)**.** *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Sporem. Nechť A_1 a A_2 jsou dvě různé limity funkce f daném bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Mějme dále posloupnost $\{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a$. Potom dle Heineho (Věta 3.13) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A_1$ a zároveň $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A_2$. Dostáváme tím spor s větou o jednoznačnosti limity posloupnosti (Věta 2.7). □

Věta 3.15 (limita a omezenost)**.** *Nechť f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je na $P(a, \delta)$ omezená.*

Důkaz. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Z definice limity vyplývá, že:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(P(a, \delta)) \subseteq U(A, \varepsilon).$$

Jelikož je limita vlastní, platí dále:

$$U(A, \varepsilon) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

Zvolme $\varepsilon = 1$. Platí:

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(A, 1) = (A - 1, A + 1),$$

a tedy $f(x)$ je omezená na $P(a, \delta)$. □

Věta 3.16 (o aritmetice limit funkcí)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:*

i. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován;*

ii. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován;*

iii. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.*

Důkaz. Dokážeme pouze pro bod (i); ostatní případy se řeší analogicky.
Zvolme libovolnou posloupnost $\{x_n\}$, splňující

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a.$$

Potom dle Heineho (Věta 3.13):

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A,$$
$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B.$$

a dle věty o aritmetice limit posloupností (Věta 2.13):

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B.$$

Protože posloupnost $\{x_n\}$ je libovolná, dle Heineho:

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

□

Důsledek 3.17. *Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou i funkce $f+g$, $f \cdot g$ spojité v bodě a. Pokud je navíc $g(a) \neq 0$, pak je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a.*

Věta 3.18 (Limita a uspořádání)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

i. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje prstencové okolí $P(a,\delta)$ tak, že:

$$\forall x \in P(a,\delta) : f(x) > g(x).$$

ii. Nechť existuje prstencové okolí $P(a,\delta)$ tak, že:

$$\forall x \in P(a,\delta) : f(x) \leq g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Potom platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

iii. Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(a,\delta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim_{x\to a} h(x)$ a všechny tři limity se rovnají.

Důkaz.

i. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B, A > B$. Zvolme $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$. Dle definice limity:

$$\exists \delta_1 : f(P(a,\delta_1)) \subseteq U(A,\varepsilon),$$
$$\exists \delta_2 : g(P(a,\delta_2)) \subseteq U(B,\varepsilon).$$

Zvolme $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Zřejmě:

$$\forall x \in P(a,\delta_0) : f(x) > g(x).$$

ii. Sporem. Důkaz je analogický k bodu (*ii*) v důkazu věty o limitě a uspořádání posloupností (Věta 2.14).

iii. Pro $\varepsilon > 0$ existují δ_1, δ_2 jako v bodě (*i*). Pro $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$ platí:

$$h(P(a, \delta_0)) \subseteq U(A, \varepsilon),$$

a tedy $\lim_{x \to a} h(x) = A$.

$\square$

Definice 3.19. Mějme funkce $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$ a $g : N \to \mathbb{R}, N \subset \mathbb{R}$. Pokud $g(N) \subseteq M$, potom funkci $h : N \to \mathbb{R}, h(x) = f(g(x))$ nazveme složenou funkcí.

Složenou funkci h značíme: $h = f \circ g$. Funkci f se říká vnější funkce, funkci g vnitřní funkce.

Poznámka 3.20 (Vztah limit vnější, vnitřní a složené funkce)**.** Nechť:

$$\lim_{x \to a} g(x) = A,$$

$$\lim_{x \to A} f(x) = B.$$

Platí obecně:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = B?$$

Neplatí! Uvažujme následující dvě funkce:

$$g(x) = 3 \;\forall x \in N,$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 3 \\ 0 & \text{pro } x \neq 3 \end{cases}$$

Zřejmě:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \underbrace{3}_{A},$$

$$\lim_{x \to A=3} f(x) = \underbrace{0}_{B}.$$

Limita složené funkce:

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{x \to 0} f(3) = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \neq B.$$

Schéma z počátku poznámky nicméně platí při splnění dodatečných podmínek, které jsou popsány v následující větě.

Věta 3.21 (Limita složené funkce)**.** *Nechť funkce f a g splňují:*

i. $\lim_{x \to a} g(x) = A$,

ii. $\lim_{y\to A} f(y) = B$.

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek:

(P1) f *je spojitá v* A,

(P2) $\exists \eta > 0\ \forall x \in P(a,\eta) : g(x) \neq A$,

pak platí $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Poznámka 3.22. Funkce f a g z předchozí poznámky nesplňovaly podmínky (P1) a (P2). Funkce f nebyla spojitá v $A = 3$ a pro funkci g neexistovalo prstencové okolí bodu $a = 0$, ve kterém nenabývala své limity $A = 3$.

Důkaz.

(P1) Díky existenci limity a spojitosti funkce f v bodě A platí, že ke zvolenému $\varepsilon > 0$:

$$\exists \varphi > 0 : f(U(A,\varphi)) \subseteq U(B,\varepsilon).$$

Dále, k danému φ:

$$\exists \chi > 0 : g(P(a,\chi)) \subseteq U(A,\varphi).$$

Nakonec:

$$f(g(P(a,\chi))) \subseteq f(U(A,\varphi)) \subseteq U(B,\varepsilon),$$

a tedy $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

(P2) Díky existenci limity funkce f v bodě A platí, že ke zvolenému $\varepsilon > 0$:

$$\exists \varphi > 0 : f(P(A,\varphi)) \subseteq U(B,\varepsilon).$$

Dále, k danému φ:

$$\exists \chi > 0 : g(P(a,\chi)) \subseteq U(A,\varphi).$$

Pro $\psi = \min(\chi,\eta)$ díky podmínce (P2) dále platí:

$$g(P(a,\psi)) \subseteq P(A,\varphi).$$

Nakonec:

$$f(g(P(a,\psi))) \subseteq f(P(A,\varphi)) \subseteq U(B,\varepsilon),$$

a tedy $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

$\square$

Věta 3.23 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť funkce* f *je monotónní na intervalu* (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^*$. *Potom existuje* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *i* $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Důkaz. Větu dokážeme pro f neklesající a pro $\lim_{x\to a+}$. Ostatní případy se dokáží analogicky.

Definujme množinu $M = f((a,b)) = \{f(x), x \in (a,b)\}$, položme $A := \inf M$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Z vlastností infima (Definice 1.13) víme, že:

$$\exists y_0 = f(x_0) \in M : A \leq y_0 < A + \varepsilon.$$

Potom díky monotonii funkce f:

$$\forall x,\ a < x < x_0 : f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Nyní zvolíme $\delta > 0$ takové, aby $P_+(a,\delta) \subseteq (a, x_0)$. Potom:

$$\forall x \in P_+(a,\delta) : f(x) \in U(A,\varepsilon),$$

a tedy $\lim_{x\to a+} f(x) = A$. □

3.3 Funkce spojité na intervalu

Definice 3.24. Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je <u>interval</u>, pokud $\exists a, b \in \mathbb{R}^*$ tak, že:

$$M = \{x \in \mathbb{R} : a \prec x \prec b\},$$

kde relace $\prec$ je buď $\leq$ nebo $<$.

Body a, b nazýváme <u>krajními body</u> intervalu; ostatní body intervalu M nazýváme <u>vnitřními body</u>.

Pozorování 3.25. *Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je interval, právě když*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y, x \in M, y \in M \implies z \in M,$$

tj. právě když je <u>konvexní podmnožinou</u> $\mathbb{R}$.

Důkaz.

$\Longrightarrow$ Zřejmé: Každý interval je konvexní množina.

$\Longleftarrow$ Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je konvexní množina. Označme $a := \inf M$, $b := \sup M$. Potom

$$(a,b) \subseteq M \subseteq [a,b].$$

Proč? Pokud $x \in (a,b)$, potom z definice suprema a infima $\exists \alpha, \beta \in M : \alpha < x < \beta$. Díky konvexivitě je i $x \in M$. Pokud naopak $x \in M$, z definice suprema a infima vyplývá $a \leq x$ a $x \leq b$, a tedy $x \in [a,b]$.

Množina M se tedy od (a,b) liší jen eventuálním přidáním jednoho nebo obou bodů a, b, a je tedy intervalem.

□

Definice 3.26. Nechť f je funkce a J interval. Řekneme, že f je spojitá na intervalu J, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech J. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě, a je-li koncový bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.

Věta 3.27 (Darboux)**.** *Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a, b)$ tak, že $f(x) = y$.*

Důkaz. Definujme množinu $M \coloneqq \{x \in [a, b], f(x) < y\}$. Označme dále $x_0 = \sup M$. Tvrdím, že $f(x_0) = y$. Toto tvrzení nyní dokážeme sporem s vlastnostmi suprema.

Nechť platí $f(x_0) < y$. Zvolme $\varepsilon = \frac{y - f(x_0)}{2} > 0$. Jelikož dle předpokladů je f spojitá v x_0, existuje $\delta > 0\ \forall x \in U(x_0, \delta) : f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$, neboli $f(x) < y$. Zde nicméně dostáváme spor s definicí suprema: x_0 nemůže býti supremem množiny M, neboť existují $x > x_0$, pro které také platí $f(x) < y$.

Nechť naopak platí $f(x_0) > y$. Zvolme $\varepsilon = \frac{f(x_0) - y}{2} > 0$. Jelikož je f spojitá, existuje $\delta > 0\ \forall x \in U(x_0, \delta) : f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$, neboli $f(x) > y$. Potom ale $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) > y$ a tedy $x_0 - \delta$ je také horní závora množiny M a dostáváme se tak do sporu s druhou vlastností suprema. □

Věta 3.28 (Zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť J je interval. Nechť funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak je množina $f(J)$ také interval.*

Důkaz. Nechť $x, y \in f(J), z \in \mathbb{R}$ a $x \leq z \leq y$. Potom $x = f(\alpha)$ a $y = f(\beta)$ pro $\alpha, \beta \in J$. Nechť bez újmy na obecnosti $\alpha \leq \beta$.

Protože zúžená funkce $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f(\alpha) \leq z \leq f(\beta)$, podle Darbouxovy věty (Věta 3.27) máme i $z = f(\gamma)$ pro nějaké $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Množina $f(J)$ je tedy konvexní a dle Pozorování 3.25 je tedy interval. □

Definice 3.29. Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$

maxima na M, jestliže $\forall x \in M :$	$f(x) \leq f(a)$,
minima na M, jestliže $\forall x \in M :$	$f(x) \geq f(a)$,
ostrého maxima na M, jestliže $\forall x \in M, x \neq a :$	$f(x) < f(a)$,
ostrého minima na M, jestliže $\forall x \in M, x \neq a :$	$f(x) > f(a)$,

lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima), jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f nabývá na $M \cap U(a, \delta)$ svého maxima (ostrého maxima, ostrého minima, minima).

Pozorování 3.30 (Heineho věta pro spojitost)**.** *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

i. f je spojitá v a, tj. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;

ii. pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *takovou, že:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in M, x_n \neq a, \text{ a zároveň } \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Věta 3.31 (spojitost funkce a nabývání extrémů)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a minima.*

Důkaz. Označme $A \coloneqq \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$. Z vlastností suprema existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$, např. $f(x_1) > A - 1, f(x_2) > A - \frac{1}{2}, f(x_3) > A - \frac{1}{3}$, atd.

Jelikož $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in [a, b]$, posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a tedy dle Bolzano-Weierstrassovy věty (Věta 2.34) existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = z \in [a, b].$$

Jelikož je funkce f v bodě z spojitá, platí dle Heineho věty pro spojitost (Pozorování 3.30):

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(z).$$

Zároveň ale víme, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Dle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.11) je i

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$$

a dle věty o jednoznačnosti limity posloupnosti (Věta 2.7) platí $f(z) = A$, a tedy funkce f nabývá svého maxima A v bodě $z \in [a, b]$.

Důkaz minima je analogický. □

Věta 3.32 (spojitost funkce a omezenost)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak je funkce f na $[a, b]$ omezená.*

Důkaz. Dle věty o spojitosti funkce a nabývání extrémů (Věta 3.31) nabývá funkce f na $[a, b]$ svého maxima (A) i minima (B). Potom $\forall x \in [a, b] : B \leq f(x) \leq A$ a funkce f je tedy na intervalu $[a, b]$ omezená. □

Definice 3.33. Nechť f je funkce a J interval. Řekneme, že f je prostá na J, pokud $\forall x, y \in J : x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

Pro prostou funkci $f : J \to \mathbb{R}$ definujeme inversní funkci $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$ předpisem: $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

Věta 3.34 (o inversní funkci)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom je funkce f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na itervalu $f(J)$.*

Důkaz. Nechť je f například rostoucí. Nejprve dokážeme sporem, že i f^{-1} je rostoucí. Nechť existují $y_1, y_2 \in f(J), y_1 < y_2$ tak, že $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. Potom ovšem dostáváme spor: $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2)) = y_2$.

Dokažme nyní spojitost f^{-1}. Zvolme $y_0 \in f(J), y_0 = f(x_0), \varepsilon > 0$ a uvažujme nejprve možnost, kdy y_0 je vnitřní bod $f(J)$ (a tedy x_0 je vnitřní bod J). Potom existují x_1, x_2 tak, že $x_1 < x_0 < x_2$ a $(x_1, x_2) \subseteq U(x_0, \varepsilon)$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby $U(y_0, \delta) \subseteq (f(x_1), f(x_2))$. Potom:

$$f^{-1}(U(y_0, \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(f(x_1), f(x_2)) = (x_1, x_2) \subseteq U(x_0, \varepsilon) = U(f^{-1}(y_0), \varepsilon).$$

Uvažujme dále možnost, že je J uzavřený interval a x_0 je jeho levý krajní bod. Zvolme $x_1 \in U_+(x_0, \varepsilon)$ a $\delta = f(x_1) - y_0$. Potom díky monotonii funkce f^{-1} platí pro všechny $y \in U_+(y_0, \delta)$:

$$f^{-1}(y) \in U_+(x_0, \varepsilon) \subseteq U(x_0, \varepsilon).$$

Pravý krajní bod se řeší analogicky. □

3.4 Elementární funkce

3.4.1 Exponenciála a logaritmus

Věta 3.35 (Zavedení exponenciály)**.** *Existuje právě jedna funkce* exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující následující dvě podmínky:*

i. $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,

ii. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) \geq 1 + x$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že daná funkce existuje, a ukažme si, že v tom případě je definována jednoznačně: Postupně odvodíme několik jejích vlastností, až se tak dostaneme k jejímu jednoznačnému vyjadření. Poté dokážeme i její existenci[1].

A. Jednoznačnost.

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} : \exp(nx) = \exp(x)^n$.
   Důkaz indukcí:
   I. $\exp(1x) = \exp(x)$
   II. $\exp((n+1)x) = \exp(nx+x) = \exp(nx)\exp(x) = (\exp(x))^n \exp(x) = (\exp(x))^{n+1}$
2. $\exp(0) = 1$.
   Rozepišme nejprve výraz $\exp(0)$:

   $$\exp(0) = \exp(0 + 0) \overset{i.}{=} \exp(0)\exp(0) = (\exp(0))^2.$$

   $\exp(0)$ tedy může být buď 0 nebo 1. První možnost je ve sporu s podmínkou (*ii*), a proto $\exp(0) = 1$.

[1] Důkaz této věty jsem zpracoval na základě poznámek Petra Baudiše z přednášek Luboše Picka: `http://math.or.cz/analyza`.

3. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \wedge \exp(x) \neq 0.$

   $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x).$

4. $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty.$

   Plyne z podmínky (ii) a Věty 3.18 (limita a uspořádání).

5. $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$

   Vyplývá z předchozích dvou bodů.

6. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0.$

   $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) \overset{i.)}{=} \exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2}) \geq 0.$

7. $\forall x > 0 : \exp(x) > 1.$

   Vyplývá z podmínky (ii).

8. Exponenciála je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$.

   $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y : 1 \overset{7.}{<} \exp(y - x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)}$. Jelikož se jedná o kladnou funkci, platí $\exp(y) > \exp(x)$.

9. $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$

$$\frac{1}{\exp(x)} \overset{3.}{=} \exp(-x) \overset{ii.}{\geq} 1 - x,$$

   a tedy:

$$1 + x \overset{(ii.)}{\leq} \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

   Další úpravou získáváme:

$$x \leq \exp(x) - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

   a po vydělení výrazem x:

$$1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

   Výslednou limitu získáme díky Větě 3.18 (limita a uspořádání).

10. $\exp(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (\exp(x) - \exp(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} (\exp((x - x_0) + x_0) - \exp(x_0)) \\
&= \lim_{x\to x_0} (\exp(x - x_0)\exp(x_0) - \exp(x_0)) \\
&= \lim_{x\to x_0} \exp(x_0) \underbrace{\frac{\exp(x - x_0) - 1}{x - x_0}}_{\to 1} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

11. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
Pokud se nám podaří dokázat tuto rovnost, dokážeme díky jednoznačnosti limity posloupnosti (Věta 2.7) i jednoznačnost definice exponenciály.
Dle podmínky (ii) platí:
$$\exp\left(-\frac{x}{n}\right) \geq 1 - \frac{x}{n}$$
Zvolme $k > |x|$. Pro $n \geq k, n \in \mathbb{N}$ je i pravá strana nerovnice kladná a při umocnění obou stran na n-tou dostáváme:
$$\exp\left(-\frac{x}{n}\right)^n \stackrel{1.}{=} \exp\left(-n\frac{x}{n}\right) = \exp(-x) \stackrel{3.}{=} \frac{1}{\exp(x)} \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
a tedy:
$$\exp x \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}$$
Můžeme tedy psát:
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp\left(\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}$$
a po vydělení výrazem $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$:
$$1 \leq \frac{\exp(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}$$
Dle Bernoulliho (Věta 1.5) dále platí:
$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}$$
a proto:
$$1 \leq \frac{\exp(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}}_{\to 1 \text{ při } n \to \infty}$$
Nyní již stačí využít strážníků (Věta 2.14) k dokázání limity z počátku.

B. Existence.

V následujících bodech ukážeme, že posloupnost:
$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
je pro dostatečně velká n neklesající a omezená pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což zaručí, že tato posloupnost má limitu a že tato limita je vlastní (viz také Větu 2.29). Tím dokončíme formální zavedení exponenciály.

I. Monotonie.

Podobně jako výše zvolme $k > |x|$. Pro $n \geq k, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{n \cdot (1+\frac{x}{n})+1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}$$

Zde jsme využili vztahu geometrického a aritmetického průměru (Věta 1.6) pro $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 1 + \frac{x}{n}$ a $z_{n+1} = 1$. Pokud umocníme obě strany nerovnosti na $(n+1)$-tou, dostáváme:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

a tedy platí $\forall n \geq k : a_n \leq a_{n+1}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy neklesající.

II. Omezenost.

Nyní ukážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ má omezenou podposloupnost $\{a_{n_k}\}$. Z toho pak vyplývá, že i posloupnost $\{a_n\}$ je omezená[2].

Zvolme $k > |x|$. Dokážeme, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(1+\frac{x}{nk}\right)^{nk} \leq \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k},$$

a tedy, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_{nk} \leq \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k}$.

Pro zvolené k a pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{nk}\right)^{-n} &= \left(\frac{nk+x}{nk}\right)^{-n} \\
&= \left(\frac{nk}{nk+x}\right)^{n} \\
&= \left(1-\frac{x}{nk+x}\right)^{n} \\
&\geq 1 - \frac{nx}{nk+x} && \text{(Bernoulliho nerovnost, Věta 1.5)} \\
&\geq 1 - \frac{x}{k} && \left(\tfrac{x}{k} \geq \tfrac{nx}{nk+x}\right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

[2]Zde využíváme jednoduchého pozorování, které tvrdí, že posloupnost, která je monotónní a která má omezenou podposloupnost, je omezená. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost a nechť pro její podposloupnost $\{a_{n_k}\}$ platí: $\forall k \in \mathbb{N} : |a_{n_k}| \leq L$. Nechť, pro spor, posloupnost $\{a_n\}$ není omezená. Potom $\forall K\ \exists n_0 : a_{n_0} > K$. Díky monotonii dále platí: $\forall n \geq n_0 : a_n > K$. Zvolme $K = L$. Potom $\forall k \geq n_0 : n_k \geq k \geq n_0 : a_{n_k} > L$, čímž dostáváme spor s omezeností podposloupnosti $\{a_{n_k}\}$.

Po umocnění obou stran nerovnice na k-tou dostáváme:

$$\left(1+\frac{x}{nk}\right)^{-nk} \geq \left(1-\frac{x}{k}\right)^{k}$$

a po úpravě:

$$\left(1+\frac{x}{nk}\right)^{nk} \leq \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k}$$

$\square$

Definice 3.36. Funkci inversní k exponenciále exp nazveme logaritmus $\log$.

Věta 3.37 (Vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* $\log$ *splňuje:*

a) $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *je spojitá rostoucí funkce.*

b) $\forall x, y > 0 : \log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1$.

Důkaz. V důkazech budeme využívat vlastnosti exponenciály dokázané v předchozí větě (Věta 3.35).

a) Exponenenciála $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ je rostoucí a spojitá funkce. Podle věty o inversní funkci (Věta 3.34) je tedy i logaritmus jako její inversní funkce spojitá a rostoucí funkce.

b) $\log(x) = A, x = \exp(A)$ a $\log(y) = B, y = \exp(B)$. Potom:

$$xy = \exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$$

a tedy

$$\log(xy) = A + B = \log(x) + \log(y).$$

c) Definujme funkce

$$f(y) = \frac{\exp(y)-1}{y},\ g(x) = \log(x)$$

pro jejichž limity platí:

$$\lim_{y\to 0} f(y) = 1,\ \lim_{x\to 1} g(x) = 0^3.$$

Potom pro limitu složené funkce $f(g(x))$ v bodě 1 platí:

$$\lim_{x\to 1} f(g(x)) = 1.$$

Zde jsme využili větu o limitě složené funkce (Věta 3.21) a její podmínky (P2), tj. že funkce log nenabývá v prstencovém okolí bodu 1 hodnoty 0. Můžeme tedy psát:

$$1 = \lim_{x\to 1} f(g(x)) = \lim_{x\to 1} \frac{\exp(\log(x))-1}{\log(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\log(x)}.$$

[3] Víme, že $\exp(0) = 1$ a tedy $\log(1) = 0$. Dále víme, že logaritmus je spojitá funkce.

$\square$

Definice 3.38. Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Pak definujeme obecnou mocninu jako:

$$a^b := \exp(b \log(a)).$$

Je-li navíc $b > 0$, pak definujeme logaritmus při základu b následovně:

$$\log_b(a) := \frac{\log(a)}{\log(b)}.$$

Poznámka 3.39 (Korektnost definice obecné mocniny)**.** Pro $x > 0$ platí:

$$\begin{aligned} x^n &= \exp(n \log(x)) && \text{(nová definice)} \\ &= \exp(\log(x^n)) && \text{(matematickou indukcí)} \\ &= x^n && \text{(stará definice)} \end{aligned}$$

Poznámka 3.40 (Logaritmus při základu 10)**.** Na případu $b = 10$ ukážeme, že $b^{\log_b(x)} = x$, a tedy že definice logaritmu při základu b je korektní:

$$10^{\log_{10}(x)} = 10^{\frac{\log(x)}{\log(10)}} = (e^{\log(10)})^{\frac{\log(x)}{\log(10)}} = e^{\log(x)} = x.$$

Poznámka 3.41 (Odmocnina jako obecná mocnina)**.**

$$\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{n}\log(x)\right) & x > 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

3.4.2 Goniometrické funkce

Věta 3.42. *Existuje právě jedna funkce* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a právě jedna funkce* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}:$
$$\begin{aligned} &\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &\cos(-x) = \cos x, \\ &sin(-x) = -\sin x, \end{aligned}$$

b) $\exists \pi > 0$ *tak, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *a* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

c)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Poznámka 3.43 (Další vlastnosti goniometrických funkcí)**.** Ze „základních“ vlastností goniometrických funkcí uvedených v předchozí větě lze odvodit jejich další vlastnosti: periodicita, intervaly monotónnosti, ostatní součtové vzorce, atd. V následujícím textu budeme předpokládat, že tyto vlastnosti známe ze střední školy, a dokazovat je nebudeme.

Poznámka 3.44. Dokažme tuto limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Nejprve daný výraz v několika krocích upravíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}.$$

Jelikož

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$$

a kosinus je spojitá funkce (jak dokážeme později), můžeme využít věty o aritmetice limit (Věta 3.16) a psát:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Definice 3.45. Pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ a $y \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ definujeme funkce tangens a kotangens předpisem:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ a } \operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta 3.46 (spojitost sinu a kosinu)**.** *Funkce* $\sin, \cos, \tan$ *a* cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*

Důkaz. Začněme sinem. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(\sin x - \sin a) &= \lim_{x\to a} 2\cdot \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right) && \text{(goniometrický vzorec)}\\
&= \lim_{x\to a} 2\cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}}_{\to 1} \underbrace{\frac{x-a}{2}}_{\to 0} \underbrace{\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)}_{\le 1} && \text{(viz níže)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ve druhém kroku jsme využili věty o limitě složené funkce (Věta 3.21) pro:

$$f(y) = \frac{\sin y}{y} \text{ a } g(x) = \frac{x-a}{2}$$

a to za podmínky (P2).

Nyní dokážeme spojitost pro kosinus. Pokud do vzorce:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$

dosadíme $y = \frac{\pi}{2}$, získáme následující vztah mezi sinem a kosinem:

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}).$$

Dle věty o limitě složené funkce (Věta 3.21) je tedy kosinus spojitý, neboť jak sinus, tak $x \to x + \frac{\pi}{2}$ jsou spojité funkce.

Dle věty o aritmetice limit funkcí (Věta 3.16) (limita podílu) jsou i tan a cotg spojité funkce. □

Definice 3.47. Nechť

$$\begin{aligned}\sin^* x &= \sin x \text{ pro } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\\ \cos^* x &= \cos x \text{ pro } x \in [0, \pi],\\ \tan^* x &= \tan x \text{ pro } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ a}\\ \operatorname{cotg}^* x &= \operatorname{cotg} x \text{ pro } x \in (0, \pi).\end{aligned}$$

Definujeme arcsin (resp. arccos, arctan, arccotg) jako inversní funkce k funkci $\sin^*$ (resp. $\cos^*, \tan^*, \operatorname{arctan}^*$).

Poznámka 3.48. $\arcsin(\sin x) = x$ pouze pro $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Poznámka 3.49 (Příklady limit)**.**

- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

  Definujme následující dvě funkce:

  $$f(y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}, \; g(x) = \arcsin x.$$

  Potom limita jejich složené funkce v bodě 0 se rovná převrácené hodnotě hledané limity:

  $$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x}$$

  Víme dále, že:

  $$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x\to 0} f(y) = 1.$$

  Za použití věty o limitě složené funkce (Věta 3.21) a podmínky (P1) (funkce f je v bodě 0 spojitá):

  $$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1,$$

  a tedy:

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

- $\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin(\frac{1}{n})$.

  $$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1.$$

3.5 Derivace funkce

Definice 3.50. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak derivací f v bodě a budeme rozumět:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f v bodě a zprava budeme rozumět:

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f v bodě a zleva budeme rozumět:

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámka 3.51.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Poznámka 3.52 (Příklady limit)**.**

- $f(x) = x^n, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} h + \binom{n}{2} a^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} h^n - a^n}{h} \\ &= \binom{n}{1} a^{n-1} \\ &= n a^{n-1}. \end{aligned}$$

- $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

  Vyjádřeme nejdříve jednostranné limity:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{1 - 0}{h} = +\infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-1 - 0}{h} = +\infty.$$

  Díky vztahu limity a jednostranných limit (Pozorování 3.9) můžeme psát:

$$\operatorname{sgn}' 0 = +\infty.$$

- $f(x) = |x|$.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

  Derivace $f(x)$ v bodě 0 neexistuje.

- $f(x) = \exp x$.

  Vyjádřeme derivaci funkce exp v bodě $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(a+h)-\exp a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp a \exp h - \exp a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp a \cdot (\exp h - 1)}{h}.$$

  Jelikož $\lim_{h\to 0} \exp a = \exp a$ a $\lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = 1$, získáme za použití věty o aritmetice limit funkcí (Věta 3.16) následující rovnost:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \exp a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp a.$$

- $f(x) = \log x$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(a+h)-\log(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

Věta 3.53 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Chceme dokázat, že $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

□

Poznámka 3.54. Podobná věta platí i pro jednostranné limity. Platí-li $f'_+(a) \in \mathbb{R}$, je funkce f spojitá v bodě a zprava.

Věta 3.55. *Nechť $f'(a)$ a $g'(a)$ existují. Potom:*

i. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *pokud má pravá strana smysl.*

ii. Nechť je g spojitá v a, pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, pokud má pravá strana smysl.

iii. Nechť je g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, pokud má pravá strana smysl.

Důkaz.

i.

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(a) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)+g'(a).
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
(fg)'(a) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \lim_{h\to 0} g(a+h) + \lim_{h\to 0} f(a) \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)g(a)-f(a)g'(a).
\end{aligned}
$$

Spojitosti funkce g jsme využili při vyjádření limity: $\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$.

iii. Funkce g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, tedy $\exists \delta > 0\ \forall h \in U(a,\delta) : g(a+h) \neq 0$. Dále:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \left(\lim_{h\to 0} g(a) \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0}(-f(a)) \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \right) \\
&= \frac{1}{g^2(a)} \left(g(a)f'(a) - f(a)g'(a) \right).
\end{aligned}
$$

□

Věta 3.56 (derivace složené funkce)**.** *Nechť f má derivaci v bodě y_0, g má derivaci v x_0 a je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak:*

$$
(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),
$$

je-li výraz vpravo definován.

Příklad 3.57. Určete derivaci funkce e^{x^2} v bodě a.

Funkce e^{x^2} je složená funkce $f(g(x))$:

$$f(y) = e^y, g(x) = x^2, f'(y) = e^y, g'(x) = 2x$$

Potom:

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x.$$

$\diamondsuit$

Důkaz. Potřebujeme upravit následující limitu:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Z existence derivace funkce f v bodě y_0 víme, že tato funkce je definována na jistém okolí toho bodu: $U(y_0, \varepsilon)$. Funkce g je spojitá v x_0 a $g(x_0) = y_0$. Z toho vyplývá, že $\exists \delta > 0$: $g(U(x_0, \delta)) \subseteq U(y_0, \varepsilon)$ a tedy že složená funkce $f \circ g$ je definovaná na $U(x_0, \delta)$.

Zabývejme se nejprve případem, kdy derivace funkce f v bodě y_0 je vlastní, tj. $f'(y_0) \in \mathbb{R}$. Definujme následující funkci:

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & y \neq y_0 \\ f'(y_0) & y = y_0. \end{cases}$$

Funkce F je spojitá v bodě y_0. Díky spojitosti funkce g platí $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$. Dle věty o limitě složené funkce (Věta 3.21), podmínka (P1) platí:

$$\begin{aligned}
f'(y_0) &= \lim_{y\to y_0} F(y) \\
&= \lim_{x\to x_0} F(g(x)) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} F(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} F(g(x)) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(y_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Uvažujme nyní případ, kdy derivace funkce f v bodě y_0 je nevlastní, tj. $f'(y_0) = \pm\infty$. V tomto případě musí platit, že $g'(x_0) \neq 0$, jinak by nebyl výraz $f'(y_0)g'(x_0)$ definován. Z toho vyplývá, že:

$$\exists \delta > 0\, \forall x \in P(x_0, \delta) : \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0,$$

a tedy, že na tomto okolí $g(x) \neq g(x_0)$. Definujme dále funkci $F(y)$ pro $y \neq y_0$:

$$F(y) = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}.$$

Potom můžeme psát:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(y_0) g'(x_0) \qquad \text{(viz níže)}
\end{aligned}$$

V posledním kroce jsme vuyžili věty o limitě složené funkce (Věta 3.21) a podmínky (P2): $g(x)$ nenabývá své limity na okolí x_0. □

Věta 3.58 (derivace inversní funkce)**.** *Nechť f je na intervalu (a, b) spojitá a rostoucí (klesající). Nechť f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Důkaz. Definujme funkci $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0. \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá v bodě x_0. Definujme dále funkci $g(y)$:

$$g(y) = f^{-1}(y).$$

Funkce inversní k f je spojitá (Věta 3.34), a tedy:

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0).$$

Potom dle věty o limitě složené funkce (Věta 3.21, (P1)):

$$\lim_{y \to y_0} F(g(y)) = f'(x_0).$$

Zároveň ovšem:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to y_0} F(g(y)) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}
\end{aligned}$$

Nakonec tedy:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Poznámka 3.59 (Derivace elementárních funkcí)**.**

- $(k)' = 0$, k je konstanta.
- $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
- $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$.
- $x^a, x > 0, a \in \mathbb{R}:$

$$(x^a)' = (e^{a\log x})' = e^{a\log x} \cdot (a\log x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

- $\sin x:$

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{x+h-x}{2})\cos(\frac{x+h+x}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \\ &= 1 \cdot \cos x = \cos x.\end{aligned}$$

- $\cos x:$

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \sin(x + \frac{h}{2}) \\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

- $\tan x:$

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, analogicky.

- $\arcsin x, x \in (-1, 1)$:

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sin' y} && \text{(pro } y = \arcsin x \text{, Věta 3.58)} \\
&= \frac{1}{\cos y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. && (\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2)
\end{aligned}
$$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Věta 3.60 (Fermatova)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.*

Důkaz. Sporem. Nechť v bodě a existuje nenulová derivace, tj. $f'(a) \neq 0$. Nechť je bez újmy na obecnosti $f'(a) > 0$. Potom:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in P(a, \delta) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Zvolme $\varepsilon = \frac{f'(a)}{2}$. Potom:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in P(a, \delta) : \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right| < \frac{f'(a)}{2}.$$

Po úpravě:

$$\forall x \in P(a, \delta) : 0 < \frac{f'(a)}{2} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Potom pro $x \in P_+(a, \delta) : x - a > 0$, a tedy $f(x) - f(a) > 0$. Naopak, pro $x \in P_-(a, \delta)$: $x - a < 0$, a tedy $f(x) - f(a) < 0$. V tom případě ovšem bod a není ani lokálním maximem, ani lokálním minimem. □

Poznámka 3.61. V typické úloze máme spojitou funkci na intervalu $[a, b]$ a naším úkolem je nalézt její maxima a minima:

a. Dle věty o spojitosti funkce a nabývání extrémů (Věta 3.31) víme, že tato funkce nabývá na daném intervalu $[a, b]$ svých extrémů.

b. Dále dle Fermatovy věty (Věta 3.60) víme, v jakých bodech se tyto extrémy mohou nacházet, tj. víme, kde hledat:

$$\{x \in [a, b], f'(x) = 0\} \cup \{x \in [a, b], f'(x) \text{ neexistuje}\} \cup \{a, b\}$$

Věta 3.62 (Rolleova)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.*

Důkaz. Pokud pro $\forall x \in [a, b] : f(x) = f(a)$, potom $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.

Nechť existuje $x \in (a, b)$ tak, že $f(x) \neq f(a)$. Nechť bez újmy na obecnosti $f(x) > f(a)$. Spojitá funkce na $[a, b]$ nabývá extrémů, a tedy dle Věty 3.31:

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Jelikož víme, že $\exists x \in (a, b)$ tak, že $f(x) > f(a)$, vyplývá, že $\xi \neq a$ a $\xi \neq b$. Dále z předpokladů víme, že $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in (a, b)$. Z toho nutně vyplývá, že $f'(\xi) = 0$. □

Věta 3.63 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a, b). Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Definujme následující funkci:

$$F(x) \coloneqq f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Tato funkce je spojitá na $[a, b]$ a zároveň má derivaci na (a, b). Dále $F(a) = F(b) = 0$. Funkce $F(x)$ tedy na intervalu $[a, b]$ splňuje podmínky Rolleovy věty (Věta 3.62), ze které vyplývá, že existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $F'(\xi) = 0$. Potom:

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1,$$

a tedy:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Věta 3.64 (Cauchyho věta o střední hodnotě)**.** *Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ takové, že f má v každém bodě (a, b) derivaci a g má v každém bodě (a, b) vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Z předpokladů vyplývá, že $g(b) \neq g(a)$, protože jinak by dle Rolleovy věty (Věta 3.62) existovalo $x \in (a, b) : g'(x) = 0$. Definujme podobně jako výše následující funkci:

$$H(x) \coloneqq (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)).$$

Funkce $H(x)$ je spojitá na $[a, b]$ a má na intervalu (a, b) derivaci. Dále $H(a) = H(b) = 0$ a tedy dle Rolleovy věty (Věta 3.62)

$$\exists \xi \in (a, b) : H'(\xi) = 0.$$

Potom:

$$0 = H'(\xi) = (f(b) - f(a))(g'(\xi) - 0) - (f'(x) - 0)(g(b) - g(a))$$

a tedy:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

$\square$

Věta 3.65 (l'Hospitalovo pravidlo)**.**

(i) Nechť $a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ *a nechť existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Nechť $a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$ *a nechť existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka 3.66 (Příklad využití l'Hospitalova pravidla)**.** Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$, je zde tedy šance na použití bodu (i) z l'Hospitalova pravidla. Vyjádřeme limitu derivací:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}.$$

Dostali jsme znovu limitu typu $\frac{0}{0}$. Pokusme se znovu zderivovat jak čitatel, tak jmenovatel:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(3x^2)'} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \\
&= -\frac{1}{6} && (\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{x} = 1, \text{ Věta 3.42})
\end{aligned}$$

Díky l'Hospitalovu pravidlu dostáváme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Mimochodem, pro vyjádření poslední limity jsme mohli místo vlastností sina použít další iteraci l'Hospitalova pravidla; výsledek bychom dostali stejný.

Důkaz.

(i)

- $a \in \mathbb{R}, \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$.

  Jelikož limita je definována pouze pro reálné funkce, vyplývá z existence $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, že:
  $$\exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a,\delta) : f'(x) \in \mathbb{R} \text{ a } g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
  Dodefinujme funkce f a g tak, že $f(a) = g(a) = 0$. Vezměme nějaké $x \in P_+(a,\delta)$. Funkce f a g jsou spojité na $[a,x]$, neboť mají vlastní derivaci na intervalu $(a,x]$ a v bodě a jsme spojitost dodefinovali. Tím jsou splněny předpoklady Cauchyho věty o střední hodnotě (Věta 3.64) a platí, že
  $$\forall x \in P_+(a,\delta)\ \exists \xi(x) \in (a,x) : \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overset{\text{při } a=0}{=} \frac{f(x)}{g(x)}$$
  Zvolme $\varepsilon > 0$. Z existence $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ víme, že
  $$\exists \delta_1 < \delta\ \forall x \in P_+(a,\delta_1) : \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U(A,\varepsilon).$$
  Nyní, $\forall x \in P_+(a,\delta_1)$ platí, že $a < \xi(x) < x$, a tedy $\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \in U(A,\varepsilon)$, a tím pádem i $\frac{f(x)}{g(x)} \in U(A,\varepsilon)$. Proto:
  $$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

- $a = -\infty, \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$.

  Jelikož platí:
  $$\lim_{x\to -\infty} h(x) = C \iff \lim_{x\to 0+} h(-\frac{1}{x}) = C,$$
  můžeme tento případ převést na předchozí pomocí substituce.
  Definujme následující dvě funkce:
  $$F(y) = f(-\frac{1}{y}),\ G(y) = g(-\frac{1}{y}).$$
  Jejich derivace jsou rovny:
  $$F'(y) = f'(-\frac{1}{y})(\frac{1}{y^2}),\ G'(y) = g'(-\frac{1}{y})(\frac{1}{y^2}).$$
  Potom:
  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'(-\frac{1}{y})(\frac{1}{y^2})}{g'(-\frac{1}{y})(\frac{1}{y^2})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Tuto variantu si dokážeme pouze pro případ $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$.

Zvolme $0 < \varepsilon < 1$. Z předpokladů víme, že:

$$\exists \delta_1 > 0 \; \forall y \in P_+(a, \delta_1) : |\frac{f'(y)}{g'(y)} - A| < \varepsilon.$$

Zvolme pevné $y \in P_+(a, \delta_1)$. Z $\lim_{x\to 0+} g(x) = \infty$ dále vyplývá, že:

$$\exists \delta_2 < \delta_1 \; \forall x \in P_+(a, \delta_2) : |\frac{g(y)}{g(x)}| < \varepsilon \wedge |\frac{f(y)}{g(x)}| < \varepsilon.$$

Nechť $x \in P_+(a, \delta_2) : a < x < y$. Potom na $[x, y]$ splňují funkce f, g předpoklady Cauchyho věty o střední hodnotě (Věta 3.64), a tedy:

$$\exists \xi \in (x, y) : \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Potom:

$$f(y) - f(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} g(y) - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} g(x).$$

Po vydělení obou stran rovnice výrazem $\frac{1}{g(x)}$:

$$\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(x)}{g(x)}.$$

Po úpravách:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(y)}{g(x)}.$$

Potom:

$$\begin{aligned} |\frac{f(x)}{g(x)} - A| &= |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(y)}{g(x)} - A| \\ &\leq |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A| + |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(y)}{g(x)}| + |\frac{f(y)}{g(x)}| \qquad \text{(trojúhelníková nerovnost)} \\ &< \varepsilon + (|A| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

A tedy:

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

□

Věta 3.67 (derivace a limita derivace)**.** *Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $\lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.*

Důkaz. Vyjádřeme $f'_+(a)$ pomocí definice:

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &\overset{?}{=} \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{1} && \text{(L'Hospitalovo pravidlo, nutno ověřit podmínky)} \\ &= A. \end{aligned}$$

Nyní je třeba ověřit, že použití L'Hospitalova pravidla (Věta 3.65) bylo korektní. Jde jednoduše nahlédnout, že se jedná o případ (i): $\frac{0}{0}$. $\square$

Definice 3.68. Nechť J je interval. Množinu všech vnitřních bodů J nazýváme vnitřek J a značíme $\operatorname{int} J$.

Věta 3.69 (o vztahu derivace a monotonie)**.** *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f nerostoucí na J.

Důkaz. Ukážeme si pouze první případ; ostatní se dokazují analogicky.

Mějme body $a, b \in J, a < b$. Funkce f je spojitá na $[a, b]$ a má derivaci v každém vnitřním bodu intervalu (a, b). Dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 3.63) platí, že

$$\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Jelikož dle předpokladů $f'(\xi) > 0$ a zároveň $b - a > 0$, musí platit i $f(b) - f(a) > 0$. Funkce f je tedy na intervalu J rostoucí. $\square$

Poznámka 3.70. Implikace v předchozí větě neplatí v opačném směru: Uvažujte například funkci $f(x) = x^3$ a případ (i).

Definice 3.71. Nechť $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ a nechť f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n + 1)$-ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět:

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

3.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice 3.72. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y], x \in \mathbb{R}, y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)], x \in D_f$ leží nad (pod) tečnou T_a, jestliže platí:

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)(f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)).$$

Definice 3.73. Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ a existuje $\Delta > 0$ tak, že

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou,

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou.

Věta 3.74 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod funkce f.*

Důkaz. Nechť je bez újmy na obecnosti $f''(a) > 0$, a tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Ukážeme, že body $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a jak v levém, tak v pravém okolí bodu a.

Díky předpokladu $f''(a) > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že :

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : f'(x) > f'(a) \wedge \forall x \in P_-(a, \delta) : f'(x) < f'(a).$$

Zvolme libovolné $y \in P_+(a, \delta)$. Funkce f je spojitá na $[a, y]$ a má vlastní derivace ve všech bodech intervalu (a, y). Potom dle Langrageovy věty o střední hodnotě (Věta 3.63):

$$\exists \xi_1 \in (a, y) : f'(a) < f'(\xi_1) = \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$

Pro všechna $y \in P_+(a, \delta)$ tedy platí:

$$f(y) > f(a) + f'(a)(y - a);$$

jinými slovy, leží nad tečnou T_a.

Zvolme nyní libovolné $z \in P_-(a,\delta)$. Analogicky ukážeme, že

$$\exists \xi_2 \in (z,a) : f'(a) > f'(\xi_2) = \frac{f(a) - f(z)}{a - z},$$

a tedy, že pro všechna $z \in P_-(a,\delta)$:

$$f(z) > f(a) + f'(a)(z-a)$$

$\square$

Věta 3.75 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť existuje $f'(a) \in \mathbb{R}$ a nechť existuje $\delta > 0$ tak, že :*

$$\forall x \in P_+(a,\delta) : f''(x) > 0 \wedge \forall x \in P_-(a,\delta) : f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod f.

Důkaz. Jelikož $f''(a) > 0$ na $P_+(a,\delta)$, je dle věty o vztahu derivace a monotonie (Věta 3.69) $f'(x)$ rostoucí na $P_+(a,\delta)$, a tedy $\forall x \in P_+(a,\delta) : f'(x) > f'(a)$.

Zvolme $x \in P_+(a,\delta)$. Dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 3.63) platí, že:

$$\exists \xi_1 \in (a,x) : f'(a) < f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že funkce je nad tečnou T_a v pravém okolí bodu a.

Analogicky ukážeme, že v levém okolí bodu a je funkce pod tečnou T_a, čímž jsou splněny podmínky pro inflexi. $\square$

Definice 3.76. Funkci f na intervalu I nazveme <u>konvexní (konkávní)</u>, jestliže:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

$$\left(\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right).$$

Funkci nazveme <u>ryze konvexní (ryze konkávní)</u>, je-li příslušná nerovnost ostrá.

Poznámka 3.77 (ekvivalentní definice konvexity)**.** Funkce f je na intervalu J konvexní, pokud:

$$\forall \alpha \in (0,1)\ \forall x, y \in J : f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Lemma 3.78. *Nechť je funkce f na intervalu I konvexní, pak:*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Důkaz. Platnost první nerovnosti je dána již z definice konvexnosti. Nás proto zajímá druhá nerovnost, tj. chceme dokázat, že platí:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Platí:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} &= \frac{f(x_3) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \\
&= \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \\
&\geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} && \text{(z definice konvexity)} \\
&\geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_2}\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \\
&\geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_2}\left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) \\
&\geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_2}\left(\frac{x_3 - x_1 - x_2 + x_1}{x_3 - x_1}\right) \\
&= \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.79. *Nechť je funkce f na intervalu I ryze konvexní, pak:*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 3.80 (konvexita a jednostranné derivace)**.** *Nechť je funkce f na intervalu J konvexní a $a \in \operatorname{int} J$. Pak $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Omezíme se na důkaz existence $f'_+(a)$. Případ jednostranné derivace zleva se dokazuje analogicky.

Naším úkolem je dokázat, že limita:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existuje a že je reálná. Z konvexity funkce f na J vyplývá, že existuje $\delta > 0$ tak, že funkce

$$H(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

je na $(a, a + \delta)$ neklesající a tedy dle věty o limitě monotónní funkce (Věta 3.23) má limitu A.

Navíc, nechť $y \in J, y < a$. Potom dle lemmatu 3.78 platí:

$$\forall x \in (a, a+\delta) : \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Funkce $H(x)$ je tedy na $(a, a+\delta)$ omezená zdola a $A \in \mathbb{R}$. □

Věta 3.81. *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak je f spojitá na J.*

Důkaz. Uvažujme libovolný bod $a \in \operatorname{int} J$. Funkce f je konvexní a tedy dle věty o konvexitě a jednostranných derivacích (Věta 3.80) existují jednostranné derivace funkce f v bodě a. Z věty o vztahu derivace a spojistosti a následující poznámky (Věta 3.53, Poznámka 3.54) dále vyplývá, že funkce funkce f je v bodě a spojitá zleva i zprava, a tedy spojitá. □

Věta 3.82 (vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))**.** *Nechť f má na intervalu (a, b) spojitou první derivaci.*

(i) Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$, pak f je konvexní na (a, b).

(ii) Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$, pak f je konkávní na (a, b).

(iii) Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$, pak f je ryze konvexní na (a, b).

(iv) Jestliže $\forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$, pak f je ryze konkávní na (a, b).

Důkaz. Ukážeme si pouze případ (i); ostatní se dokazují analogicky.

Nechť $x_1, x_2, x_3 \in (a, b), x_1 < x_2 < x_3$. Dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 3.63):

$$\exists \xi_1, \xi_2 : f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \wedge f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dále, jelikož $\forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$, první derivace funkce f je dle věty o vztahu derivace a monotonie (Věta 3.69) neklesající funkce. Protože $\xi_1 < \xi_2$, platí $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, a tedy:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

po úpravě:

$$f(x_3) \geq (f(x_2) - f(x_1)) \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} + f(x_2).$$

Odečtěme od obou stran nerovnice výraz $f(x_1)$:

$$f(x_3) - f(x_1) \geq (f(x_2) - f(x_1)) \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} + f(x_2) - f(x_1)$$

a následně je vynásobme výrazem $\frac{1}{x_3-x_1}$ a upravme:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} &\geq (f(x_2)-f(x_1))\left(\frac{x_3-x_2}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}+\frac{1}{x_3-x_1}\right)\\ &= (f(x_2)-f(x_1))\frac{x_3-x_2+x_2-x_1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}\\ &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.\end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že funkce f je konvexní (a, b). □

3.7 Průběh funkce

Definice 3.83. Řekneme, že funkce $ax+b, a, b \in \mathbb{R}$, je asymptotou funkce f v $+\infty$ $(-\infty)$, jestliže:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$$
$$(\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0)$$

Věta 3.84 (tvar asymptoty)**.** *Funkce f má v ∞ asymptotu $ax+b$, právě když*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R} \text{ a } \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b\in\mathbb{R}.$$

Důkaz.

$\implies$ Použijeme větu o aritmetice limit funkcí (Věta 3.16) a rozepíšeme obě limity. Pro koeficient a:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\stackrel{?}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x}\stackrel{?}{=}\frac{0}{\infty}+a=a.$$

Rozepsání je platné, jen pokud pravé strany mají smysl (proto ty otazníky nad rovnítky). V tomto případě smysl mají a použití věty o aritmetice limit funkcí je tedy korektní.

Podobně pro koeficient b :

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)\stackrel{?}{=}\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax+b)+\lim_{x\to\infty}b\stackrel{?}{=}0+b=b.$$

$\impliedby$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))\stackrel{?}{=}\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)-\lim b\stackrel{?}{=}b-b=0.$$

□

Poznámka 3.85. Při vyšetření průběhu funkce provádíme následující kroky:

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicita.
4. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru."
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načrtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

Příklad 3.86. Vyšetřete průběh funkce:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.

   $D_f = \mathbb{R}$, funkce je spojitá na $\mathbb{R}$.

2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.

   Položme $x = 0$:
   $$f(0) = \sqrt[3]{(0+2)^2} - \sqrt[3]{(0-2)^2} = 0,$$
   a $y = 0$:
   $$\begin{aligned} 0 &= \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} \\ \sqrt[3]{(x+2)^2} &= \sqrt[3]{(x-2)^2} \\ x^2+4x+4 &= x^2-4x+4 \\ x &= 0. \end{aligned}$$
   Jediný průsečík s osami x a y je bod $P[0,0]$.

3. Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicita.

   Pro určení parity funkce vyjádříme $f(-x)$:
   $$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt[3]{(-x+2)^2} - \sqrt[3]{(-x-2)^2} \\ &= \sqrt[3]{(-1)^2(x-2)^2} - \sqrt[3]{(-1)^2(x+2)^2} \\ &= \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2} \\ &= -1(\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Funkce f je lichá.

4. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru.“

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} \frac{\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^4}}{\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^4}} \qquad \text{(vzorec pro } a^3 - b^3\text{)} \\
&\sim \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 0.
\end{aligned}$$

5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.

   (a) Derivace.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{2}{3}-1} \cdot 1 - \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}-1} \cdot 1 \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right)
\end{aligned}$$

   Tento výraz platí pro $\forall x \neq \pm 2$. Pro určení derivace v bodech $x = \pm 2$ se pokusíme využít věty o derivaci a limitě derivace (Věta 3.67):

$$\lim_{x\to 2+} f'(x) = -\infty \implies f'_+(2) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-} f'(x) = +\infty \implies f'_-(2) = +\infty.$$

   Díky lichosti funkce platí:

$$f'_+(-2) = -f'_+(2) = +\infty,$$

$$f'_-(-2) = -f'_-(2) = -\infty.$$

   (b) Intervaly monotonie.
   Určíme intervaly, kde $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ a $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\iff \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \\
&\iff \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x-2} \\
&\iff x \in (-2, 2).
\end{aligned}$$

Podobně

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2) \vee x \in (2, +\infty).$$

Dále vyplývá, že $\forall x \in D_f : f'(x) \neq 0$.

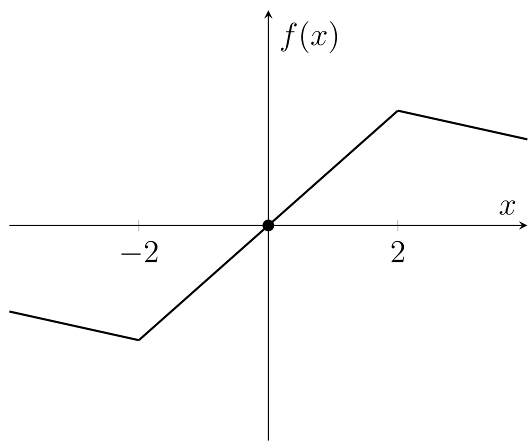
(c) Globální extrémy.

Dle Fermatovy věta (Věta 3.60) hledáme globální extrémy v bodech, kde $f'(x) = 0$ nebo $f'(x)$ neexistuje. V našem případě: $x \in \{-2, 2\}$.

Dle intervalů monotonie určíme, že f má globální minimum v bodě -2 a to $-\sqrt[3]{4^2}$ a globální maximum v bodě 2 a to $\sqrt[3]{4^2}$.

(d) První hrubý náčrt grafu funkce.

Víme, že v $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, poté funkce klesá až do bodu $x = -2$, poté roste do bodu $x = 2$ a pak zase klesá, až k nule ($\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$).



6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.

(a) Druhá derivace.

$\forall x \in D_f \setminus \{\pm 2\}$ platí:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\left((x+2)^{-\frac{4}{3}} - (x-2)^{-\frac{4}{3}}\right).$$

(b) Konvexita, konkávita.

Musíme určit intervaly, ve kterých $f''(x) > 0$ nebo $f''(x) < 0$. Platí:

$$f''(x) > 0 \iff (x+2)^{-\frac{4}{3}} < (x-2)^{-\frac{4}{3}},$$

$$f''(x) < 0 \iff (x+2)^{-\frac{4}{3}} > (x-2)^{-\frac{4}{3}},$$

a tedy funkce f je:

- konvexní na $(0, 2)$ a $(2, +\infty)$,

- konkávní na $(-\infty, -2)$ a $(-2, 0)$.

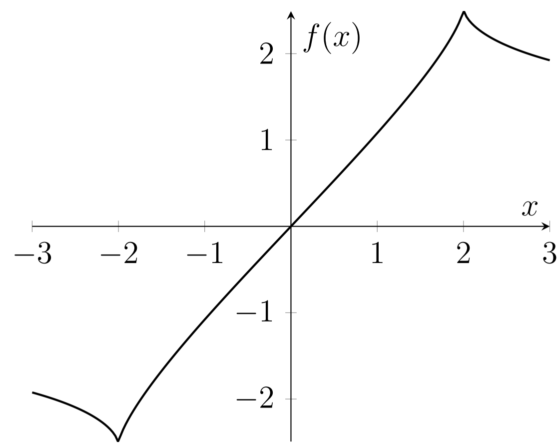
(c) Inflexní bod.

Z výrazu pro druhou derivaci víme, že $f''(x) = 0 \iff x = 0$. Zároveň jsme již určili, že $f''(x) < 0$ na $(-2, 0)$ a $f''(x) > 0$ na $(0, 2)$. Tím jsme splinili postačující podmínku pro inflexi (Věta 3.75), a proto se v $x = 0$ nachází inflexní bod.

7. Vypočteme asymptoty funkce.

   Jelikož $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, asymptoty splývají s osou x.

8. Načrtneme graf funkce a určíme obor hodnot.



$H_f = [-\sqrt[3]{4^2}, \sqrt[3]{4^2}]$.

$\diamondsuit$

3.8 Taylorův polynom

Definice 3.87. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-a)^n$$

nazýváme Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.

Poznámka 3.88 (vlastnosti Taylorova polynomu)**.**

- $\deg T_n^{f,a}(x) \leq n$.
- Derivace Taylorova polynomu:

$$\begin{aligned}(T_n^{f,a})'(x) &= 0 + f'(a) \cdot 1 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \cdot n \cdot (x-a)^{n-1} \\ &= T_{n-1}^{f',a}(x).\end{aligned}$$

Lemma 3.89. *Nechť Q je polynom, $a \in \mathbb{R}, \deg Q \leq n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q \equiv 0$.*

Důkaz. Lemma dokážeme indukcí. V základním kroce ($n = 1$) je polynom Q lineární. Dále:

$$\begin{aligned} Q(a) &= \lim_{x\to a} \left(\frac{Q(x)}{x-a}(x-a) \right) \\ &\stackrel{?}{=} \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a)^n && \text{(aritmetika limit funkcí, Věta 3.16)} \\ &= 0 \cdot 0 = 0. && \text{(předpoklad)} \end{aligned}$$

Polynom Q tedy můžeme vyjádřit jako $Q(x) = c(x-a)$. Nakonec odvodíme, že koeficient c je roven nule, jelikož:

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} c = c.$$

V indukčním kroce ($n - 1 \to n$) platí podobně jako výše, že a je kořenem polynomu Q, a proto jej můžeme vyjádřit jako:

$$Q(x) = (x-a)R(x),$$

kde R je polynom a $\deg R \leq n-1$. Dle indukčního předpokladu je $R \equiv 0$, a tedy i $Q \equiv 0$. □

Věta 3.90 (o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}, f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \iff P = T_n^{f,a}.$$

Důkaz.

$\Longleftarrow$ Využijeme matematickou indukci. Pro případ $n = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(a) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) \\ &= f'(a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

Indukční krok:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{f(a) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a})'(x)}{n(x-a)^{n-1}} && \text{(L'Hospital (Věta 3.65), } \tfrac{0}{0}\text{)} \\ &= \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot 0 = 0 && \text{(indukční předpoklad)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Rozepišme limitu na levé straně implikace za použití věty o limitě limit funkcí (Věta 3.16) jako součet dvou limit:

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}\overset{?}{=}\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{P(x)-f(x)}{(x-a)^n}}_{A}+\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}}_{B}$$

Výraz A je roven nule dle předpokladů. Výraz B je dle předchozího bodu taktéž roven nule, a proto

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}=0$$

Díky lemmatu 3.89 platí $P=T_n^{f,a}$.

$\square$

Věta 3.91 (Taylor, či obecný tvar zbytku)**.** *Nechť funkce f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$ a nechť ϕ je spojitá funkce v $[a,x]$ a má vlastní derivaci v (a,x), která je v každém bodě tohoto intervalu různá od nuly. Pak existuje $\xi\in(a,x)$ tak, že*

$$f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}\frac{\phi(x)-\phi(a)}{\phi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Speciálně existuje $\xi_1\in(a,x)$ tak, že

$$f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_1)(x-a)^{n+1}\ \textit{(Lagrangeův tvar zbytku)}$$

a existuje $\xi_2\in(a,x)$ tak, že

$$f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_2)(x-\xi_2)^n(x-a).\ \textit{(Cauchyho tvar zbytku)}$$

Důkaz. Rozdíl $f(x)-T_n^{f,a}(x)$ nazýváme zbytek. Pro $t\in[a,x]$ definujme následující funkci:

$$F(t)=f(x)-T_n^{f,t}(x)=f(x)-\left(f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

Tato funkce je:

- spojitá na $[a,x]$,
- má vlastní derivaci na (a,x),
- $F(x)=0$,
- $F(a)=f(x)-T_n^{f,a}(x)$.

Dle Cauchyho věty o střední hodnotě (Věta 3.64):

$$\exists \xi \in (a, x) : \frac{F'(\xi)}{\phi'(\xi)} = \frac{F(x) - F(a)}{\phi(x) - \phi(a)} = \frac{0 - (f(x) - T_n^{f,a}(x))}{\phi(x) - \phi(a)},$$

z čehož po úpravě dostáváme:

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = -\frac{F'(\xi)}{\phi'(\xi)}(\phi(x) - \phi(a)).$$

Vyjádřeme si nyní derivaci funkce F :

$$\begin{aligned} F'(t) &= 0 - (f'(t) + f''(t)(x-t) + f'(t)(-1) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}}{n!}n(x-t)^{n-1}(-1) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Tento výraz nyní můžeme dosadit do vzorce zbytku, který jsme vyjádřili výše, a získáme výraz pro obecný tvar zbytku:

$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= -\frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{\phi'(\xi)}(\phi(x) - \phi(a)) \\ &= \frac{1}{n!}\frac{\phi(x) - \phi(a)}{\phi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \end{aligned}$$

Pro Lagrangeův tvar zbytku volíme $\phi(t) = (x-t)^{n+1}$. Potom:

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(a) &= 0 - (x-a)^{n+1}, \\ \phi'(t) &= (n+1)(x-t)^n(-1), \end{aligned}$$

a po dosazení do obecného tvaru zbytku pro $\xi_1 \in (a, x)$:

$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= \frac{1}{n!}\frac{-(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi_1)^n(-1)} f^{(n+1)}(\xi_1)(x-\xi_1)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_1)(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Podobně pro Cauchyho tvar zbytku volíme $\phi(t) = t$. Potom:

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(a) &= x - a, \\ \phi'(t) &= 1, \end{aligned}$$

a po dosazení do obecného tvaru zbytku pro $\xi_2 \in (a, x)$:

$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= \frac{1}{n!}\frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi_2)(x-\xi_2)^n \\ &= \frac{1}{n!}(x-a) f^{(n+1)}(\xi_2)(x-\xi_2)^n \end{aligned}$$

□

Poznámka 3.92. Taylorova věta platí i pro interval (x, a).

Příklad 3.93 (Taylorův polynom pro exponenciálu)**.** Z poznámky 3.59 víme, že

$$(e^x)' = (e^x)'' = \cdots = (e^x)^{(n)} = e^x.$$

Jelikož při $x = 0$ jsou všechny derivace rovny 1, platí:

$$T_n^{exp,0} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}.$$

Zvolme pevné x. Potom pro dané n existuje $\xi_n \in (0, x)$ (nebo $(x, 0)$, pokud je $x < 0$) tak, že pro Lagrangeův tvar zbytku platí:

$$e^x - T_n^{exp,0} = e^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_n} x^{n+1}$$

Jelikož $e^{\xi_n} \leq e^{|x|}$ a $x^{n+1} \leq |x|^{n+1}$, platí:

$$|e^x - T_n^{exp,0}| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Za použití věty o dvou strážnících (Věta 2.15) a $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty} e^x - T_n^{exp,0} = 0$$

a tedy:

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Speciálně pro e :

$$e = e^1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1^j}{j!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

$\diamondsuit$

Příklad 3.94. Spočtěte hodnotu e s chybou 0.001.

Vyjádřeme e jako součet dvou sum:

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Chceme, aby:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < 0.001,$$

a naším úkolem je zjistit hodnotu n, tj. zjistit, kolik členů Taylorova polynomu musíme spočítat pro zajištění dané přesnosti. Platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1+j)!} \\
&\le \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^j} && ((n+1+j)! \ge (n+1)!(n+1)^j) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} && \text{(součtový vzorec geometrické řady)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{n\cdot n!}
\end{aligned}$$

Již při $n = 6$ je $\frac{1}{n\cdot n!} < 0.001$, a nám tedy stačí spočítat prvních 6+1 členů Taylorova polynomu (n se počítá od nuly):

$$e \approx 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

$\diamondsuit$

Příklad 3.95. Dokažte, že číslo e je iracionální.

Sporem. Nechť $e = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Z předchozího příkladu víme, že:

$$\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!} < e = \sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{q!} < \sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!} + \frac{1}{q\cdot q!}$$

Vynásobme nerovnici výrazem $(q\cdot q!)$ a získáme:

$$\underbrace{(q\cdot q!)\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}}_{A} < pq! < \underbrace{(q\cdot q!)\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}}_{A} + 1.$$

Jelikož $A \in \mathbb{N}$ i $pq! \in \mathbb{N}$, dostáváme spor, jelikož $pq!$ by muselo být přirozené číslo mezi A a $A+1$. $\diamondsuit$

Příklad 3.96 (Taylorův polynom pro funkci sin)**.** Nechť $a = 0$. Potom platí:

$$\begin{aligned}
&\sin'(x) = \cos(x),\ \sin'(a) = 1, \\
&\sin''(x) = -\sin(x),\ \sin''(a) = 0, \\
&\sin'''(x) = -\cos(x),\ \sin'''(a) = -1, \\
&\sin^{(4)}(x) = \sin(x),\ \sin^{(4)}(a) = 0. \\
&\sin^{(5)}(x) = \cos(x),\ \sin^{(5)}(a) = 1,\ \text{atd.}
\end{aligned}$$

Potom:

$$T_n^{\sin,0}(x) = (0) + \left(\frac{1}{1!}x\right) + \left(\frac{1}{2!}0x^2\right) + \left(\frac{1}{3!}(-1)x^3\right) + \left(\frac{1}{4!}0x^4\right) + \left(\frac{1}{5!}1x^5\right) + \dots$$

Dále:

$$\begin{aligned} \left|\sin(x) - T_n^{\sin,0}\right| &= \left|\frac{1}{n+1}!f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}\right| \\ &\leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \end{aligned}$$

a tím pádem $\lim_{n\to\infty}(\sin(x) - T_n^{\sin,0}) = 0$. Můžeme tedy psát:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Podobně pro $\cos(x)$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$\diamondsuit$

4 Řady

4.1 Úvod

Definice 4.1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje.

Je-li $\lim_{m\to\infty} s_m$ konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad 4.2.

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

  Diverguje, neboť $s_{2k+1} = -1$ a $s_k = 0$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

  Platí:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-n}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{a_1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{a_2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots\end{aligned}$$

  a tedy:

$$s_m = 1 - \frac{1}{m}.$$

  Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

- Geometrická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

  Pokud $q = 1$, potom triviálně:

$$s_m = m.$$

  Pro $q \neq 1$ můžeme využít vzorečku $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1)$ a psát:

$$s_m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-1} = \frac{q^m - 1}{q - 1}.$$

Pro limitu s_m při $m \to \infty$ platí:

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \begin{cases} \infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje při $|q| < 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
  Tento výsledek si odvodíme, až když budeme brát Fourierovy řady.

$\diamondsuit$

Věta 4.3 (nutná podmínka pro konvergenci řad)**.** *Jestliže je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a tedy $s = \lim_{m\to\infty} s_m \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{m\to\infty} s_{m+1} = \lim_{m\to\infty} s_m = s.$$

Dále:

$$\begin{aligned} 0 &= s - s \\ &= \lim_{m\to\infty} s_{m+1} - \lim_{m\to\infty} s_m \\ &= \lim_{m\to\infty} (s_{m+1} - s_m) && \text{(aritmetika limit, Věta 2.13)} \\ &= \lim_{m\to\infty} a_{m+1} = \lim_{m\to\infty} a_m. \end{aligned}$$

$\square$

Příklad 4.4. Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje, právě když $|q| < 1$. Zároveň platí:

$$|q| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$$

$\diamondsuit$

Poznámka 4.5. Implikaci v předešlé větě nelze obrátit. Uvažujme například harmonickou řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pro částečné součty m a $2m$ členů platí:

$$\begin{aligned}
s_m &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \\
s_{2m} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \\
s_{2m} - s_m &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \\
&\geq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} \\
&= m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

a tedy:

$$\forall m \in \mathbb{N} : s_{2m} - s_m \geq \frac{1}{2}.$$

Posloupnost $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tím nesplňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (Věta 2.35) a nemá vlastní limitu.

Věta 4.6 (linearita konvergentních řad)**.**

(i) Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \textit{ konverguje.}$$

(ii) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \textit{ konverguje.}$$

Důkaz. Jednoduchý, s využitím věty o aritmetice limit (Věta 2.13). □

4.2 Řady s nezápornými členy

Pozorování 4.7. *Nechť* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$*. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *nebo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Důkaz. Díky nezápornosti členů a_n je posloupnost částečných součtů $\{s_m\}$ neklesající a tedy dle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.29) má limitu. □

Věta 4.8 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$*. Pak*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje.*

Důkaz.

(i) Označme částečné součty:

$$\begin{aligned} s_m &= a_1 + a_2 + \cdots + a_m \\ \sigma_m &= b_1 + b_2 + \cdots + b_m. \end{aligned}$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, označme $\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \sigma$. Pro všechna $m \geq n_0$ platí:

$$\begin{aligned} s_m &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_m \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_m \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + \sigma_m \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + \sigma. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ je tedy neklesající posloupnost omezená shora číslem $(a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sigma) \in \mathbb{R}$ a dle věty o monotónní posloupnosti (Věta 2.29) má vlastní limitu.

(ii) Ekvivalentní s bodem (i): $(A \implies B) \implies (\neg B \implies \neg A)$.

□

Věta 4.9 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*.$$

(i) Jestliže $K \in (0, \infty)$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje* $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Jestliže $K = 0$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje* $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(iii) Jestliže $K = \infty$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje.*

Důkaz. Jelikož obě řady jsou řady s nezápornými členy, platí, že $K \geq 0$.

(i) Z definice limity vyplývá, že pro $\varepsilon = \frac{K}{2}$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \frac{K}{2},$$

a tedy $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{K}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} K,$$

$$\frac{K}{2}b_n < a_n < \frac{3}{2}Kb_n.$$

Potom:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2}b_n \text{ konverguje} && \text{(srovnávací kritérium, Věta 4.8)}\\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} && \text{(linearita konvergentních řad, Věta 4.6)}\end{aligned}$$

Opačný směr řešíme podobně:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}Kb_n \text{ konverguje} && \text{(linearita konvergentních řad)}\\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} && \text{(srovnávací kritérium)}\end{aligned}$$

(ii) Zvolme $\varepsilon = 1$. Potom

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall v \geq n_0, n \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1$$

a tedy

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n < b_n.$$

Potom, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak podle srovnávacího kritéria (Věta 4.8) konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) Zvolme $L = 1$. Potom dle definice nevlastní limity (Definice 2.19):

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall v \geq n_0, n \in \mathbb{N} : \frac{a_n}{b_n} > L = 1,$$

a tedy

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > b_n.$$

Pokud konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak dle srovnávacího kritéria (Věta 4.8) konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

□

Příklad 4.10. Určete, zda-li následující řady konvergují:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+3n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$.

Řešení:

(i) Pokud si z této řady vezmeme jen nejdůležitější členy, vidíme, že je podobná řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, o které víme, že diverguje (Poznámka 4.5). Označme $a_n = \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+3n}$ a $b_n = \frac{1}{n}$ a pokusme se použít limitní srovnávací kritérium:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+3n}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{3}{n}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Dle limitního srovnávacího kritéria, bodu (i) diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+3n}$.

(ii) Označme podobně $a_n = \frac{n^5}{3^n}$ a $b_n = \frac{1}{2^n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, jelikož se jedná o geometrickou řadu a $q = \frac{1}{2} < 1$ (Poznámka 4.2). Dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n^5}{3^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{n^5}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0.$$

Dle limitního srovnávacího kritéria, bodu (ii) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 3^n$.

$\diamondsuit$

Věta 4.11 (Cauchyho odmocninové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(i) $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(iv) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje,*

(v) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz.

(i) Označme $b_n = q^n$. Jelikož $q \in (0,1)$, geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (Příklad 4.2). Dále, jelikož dále $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$, dle srovnávacího kritéria (Věta 4.8) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Označme $\limsup \sqrt[n]{a} = A$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1-A}{2}$. Potom $A + \varepsilon < 1$. Dle definice limity:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sup\{\sqrt[k]{a_k}, k \geq n\} \leq A + \varepsilon,$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq A + \varepsilon.$$

Označme $q = A + \varepsilon$. Potom dle předchozího bodu (i) důkazu řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(iii) Jelikož existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, existuje dle věty o vztahu limity a limes superior (Věta 2.33) i limes superior a tyto dvě limity se rovnají. Dle bodu (ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(iv) Jelikož

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}},$$

a tedy $\forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} > 1$. Tím není splněna nutná podmínka pro konvergenci řad (Věta 4.3) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(v) Vyplývá z předchozího bodu (iv).

□

Příklad 4.12. Určete, zda-li následující řada konverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}.$$

Pokusíme zjistit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a případně použít Cauchyho odmocninové kritérium. Tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^5}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, tak dle Cauchyho odmocninového kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

♢

Věta 4.13 (d'Alambertovo podílové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(i) $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz.

(i) Pro $n \geq n_0$ platí:

$$a_{n+1} < qa_n < q^2 a_{n-1} < \cdots < q^{n-n_0+1} a_{n_0}.$$

Geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \underbrace{a_{n_0} q^{1-n_0}}_{\text{konst.}}$$

konverguje (Příklad 4.2) a tedy dle srovnávacího kritéria (Věta 4.8) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Označme $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A < 1$ a zvolme $\varepsilon = \frac{1-A}{2}$. Dle definice limes superior existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sup\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k}, k \geq n\right\} < A + \varepsilon.$$

Označme $q = A + \varepsilon$. Potom platí:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Dle předchozího bodu (i) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(iii) Jelikož existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, existuje i $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Zbytek dle předchozího bodu (ii).

(iv) Dle definice limity:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Posloupnost je tedy počínaje indexem n_0 rostoucí a tím pádem nesplňuje nutnou podmínku konvergence (Věta 4.3), jelikož její limita nemůže být nulová.

$\square$

Příklad 4.14. Určete, zda-li následující řady konvergují:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}, c > 0.$

Řešení:

(i) Označme $a_n = \frac{n^5}{3^n}$. Spočtěme limitu podílu dvou následujících členů posloupnosti $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}}{\frac{n^5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)^5}{3^{n+1}n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{n^5} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} < 1.$$

Jelikož je tato limita menší než 1, můžeme za použití d'Alambertova podílového kritéria říci, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ konverguje.

(ii) Analogicky:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{c^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1} = 0 < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}, c > 0$ konverguje.

$\diamondsuit$

Poznámka 4.15. d'Alambertovo podílové kritérium nám nepomůže v případě, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Uvažujme například následující dvě řady:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) \text{ a } \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right).$$

Pro obě posloupnosti platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

nicméně harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (Poznámka 4.5), kdežto řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz dále).

Věta 4.16 (Raabeho kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(i) $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(ii) $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Bez důkazu. $\square$

Věta 4.17 (kondenzační kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy splňující* $a_{n+1} \leq a_n$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje.}$$

Důkaz.

$\Longrightarrow$ Označme:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Potom:

$$s_{2^n} - s_{2^{n-1}} = \underbrace{a_{2^n} + a_{2^n-1} + a_{2^n-2} + \cdots + a_{2^{n-1}+1}}_{2^{n-1} \text{ členů}}$$

Jelikož $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$, platí:

$$2^{n-1} a_{2^{n-1}} \geq s_{2^n} - s_{2^{n-1}} \geq 2^{n-1} a_{2^n}.$$

Tuto sadu nerovností sečteme pro $n = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} a_{2^{n-1}} &\geq \sum_{n=1}^{k} (s_{2^n} - s_{2^{n-1}}) \\
&= (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) + (s_{2^{k-1}} - s_{2^{k-2}}) + \cdots + (s_2 - s_1) \\
&= s_{2^k} - s_1 \\
&\geq \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} a_{2^n}.
\end{aligned}$$

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom existuje $\lim_{k\to\infty}(s_{2^k} - s_1)$, řada $\sum_{n=1}^{\infty}(s_{2^n} - s_{2^{n-1}})$ konverguje a dle srovnávacího kritéria (Věta 4.8) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^n}$ a dle linearity konvergentních řad (Věta 4.6)

$\Longleftarrow$ Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. Potom konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$.

Označme $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = A \in \mathbb{R}$. Potom dle předchozího bodu:

$$\forall k \in \mathbb{N} : s_{2^k} \leq A + s_1.$$

Posloupnost $\{s_{2^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je rostoucí a omezená shora číslem $A + s_1 \in \mathbb{R}$, a proto má dle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.29) konečnou limitu. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tedy konverguje.

$\square$

Příklad 4.18. Dokažte následující dvě tvrzení:

(i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

(ii) Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Řešení:

(i) Pro $\alpha \leq 0$ platí, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence (Věta 4.3), a proto diverguje.

Nechť $\alpha > 0$. Platí, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$. Dále, dle kondenzačního kritéria platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje } \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n \text{ konverguje.}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$ je geometrická řada s $q = 2^{1-\alpha}$, která konverguje (Příklad 4.2), právě když $q < 1$, tj. $\alpha > 1$.

(ii) Uvažujme případ $\alpha > 0$. Posloupnost $\left\{\frac{1}{n \log^\alpha n}\right\}$ klesá k nule a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}$ konverguje, právě když konverguje řada:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log^\alpha 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^\alpha 2^n} = \frac{1}{\log^\alpha 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Znovu jsme získali geometrickou řadu a ta konverguje, když $\frac{1}{n^\alpha} < 1$, tj. když $\alpha > 1$.

$\diamondsuit$

4.3 Neabsolutní konvergence řad

Definice 4.19. Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Věta 4.20 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad)**.** *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když existuje vlastní limita posloupnosti částečných součtů $\lim_{m\to\infty} s_m$. Dle Bolzano-Cauchyho podmínky pro posloupnosti (Věta 2.35) tato limita existuje, právě když:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : |s_m - s_n| = \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \varepsilon.$$

$\square$

Věta 4.21 (vztah konvergence a absolutní konvergence)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Důkaz. Dle Bolzano-Cauchyho podmínky pro konvergenci řad (Věta 4.20) řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, právě když:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^{m} |a_j| \right| < \varepsilon.$$

Dále platí (trojúhelníková nerovnost, Věta 1.19):

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| \leq \left| \sum_{j=n}^{m} |a_j| \right| < \varepsilon,$$

a tedy Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad je splněna i pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a ta tedy konverguje. □

Lemma 4.22 (Abelova parciální sumace)**.** *Nechť* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. *Označme* $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. *Pak platí*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.$$

Jestliže navíc $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, *pak*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq b_1 \max |s_i|.$$

Důkaz. Platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n \\
&= \underbrace{s_1}_{a_1} b_1 + \underbrace{(s_2 - s_1)}_{a_2} b_2 + (s_3 - s_2) b_3 + \cdots + (s_n - s_{n-1}) b_n \\
&= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.
\end{aligned}$$

Jestliže navíc $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, platí:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} |s_i| (b_i - b_{i+1}) + |s_n| b_n && (b_i - b_{i+1} \geq 0, b_n \geq 0) \\
&\leq \max_{i=1,\ldots,n} |s_i| \left(\sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) + b_n \right) \\
&= \max_{i=1,\ldots,n} |s_i| \cdot b_1.
\end{aligned}$$

$\square$

Věta 4.23 (Abel-Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.*

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní.*

(D) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezené částečné součty, tedy:*

$$\exists K > 0 \ \forall m \in \mathbb{N} : |s_m| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right| < K.$$

Důkaz.

(A) Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, platí, dle Bolzano-Cauchyho podmínky pro konvergenci řad (Věta 4.20), že pro pevné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : |a_m + a_{m-1} + \cdots + a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Nyní bychom chtěli z předpokladů věty dokázat Bolzano-Cauchyho podmínku i pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Pro dané ε zvolíme stejné n_0 jako výše. Potom za použití Abelovy parciální sumace (Lemma 4.22) pro $t_k = \sum_{i=n+1}^{k} a_i$ platí:

$$\begin{aligned}
|a_m b_m + a_{m-1} b_{m-1} + \cdots + a_{n+1} b_{n+1}| &\leq \max_{i=n+1,\ldots,m} |t_i| \cdot b_{n+1} \\
&\leq \max_{i=n+1,\ldots,m} |t_i| \cdot b_1 \qquad (\{b_n\} \text{ je nerostoucí}) \\
&\leq \varepsilon \cdot b_1. \\
&\qquad (\text{Bolzano-Cauchyho podmínka pro } \{a_n\})
\end{aligned}$$

(D) Dle definice limity pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |b_n| < \varepsilon.$$

Potom znovu za použití Abelovy parciální sumace (Lemma 4.22) pro $t_k = \sum_{i=n+1}^{k} a_i$ a $m, n \geq n_0$ platí:

$$\begin{aligned}
|a_m b_m + a_{m-1} b_{m-1} + \cdots + a_{n+1} b_{n+1}| &\leq \max_{i=n+1,\ldots,m} |t_i| \cdot b_{n+1} \\
&= \max_{i=n+1,\ldots,m} |s_i - s_n| \cdot b_{n+1} \\
&\leq \max_{i=n+1,\ldots,m} (|s_i| + |s_n|) \cdot b_{n+1} \\
&\qquad (\text{trojúhelníková nerovnost, Věta 1.19}) \\
&\leq 2K\varepsilon. \quad (\{a_n\} \text{ má omezené částečné součty})
\end{aligned}$$

$\square$

Poznámka 4.24. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje za podmínky (A), i pokud neplatí, že $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \geq 0$. Nechť je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a nechť $\lim_{n\to\infty} b_n = b < 0$. Potom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\forall n \in \mathbb{N} : (b_n - b) \geq 0$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ konverguje dle podmínky (A). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b$ konverguje dle linearity konvergence řad, a konečně řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, jelikož se rovná součtu dvou konvergentních řad.

Příklad 4.25. Určete, zda-li následující řady konvergují:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\log(n+1)}$, (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \arctan(n)$.

Řešení:

(i) Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má omezené částečné součty a posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí. Dle Abel-Dirichletova kritéria (D) řada konverguje.

(ii) Podobně, posloupnost $\{\sin(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ má omezené částečné součty (zatím bez důkazu) a posloupnost $\left\{\frac{1}{\log(n+1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí. Dle Abel-Dirichletova kritéria (D) řada konverguje.

(iii) Posloupnost $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ má omezené částečné součty a posloupnost $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ tedy konverguje a dle linearity konvergence řad konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$. Dále, posloupnost $\{-\arctan(n)\}$ je nerostoucí a klesá k $-\frac{\pi}{2}$. Dle podmínky (A) Abel-Dirichletova kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \arctan(n)$ konverguje.

$\diamondsuit$

Věta 4.26 (Leibnizovo kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konverguje} \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ má omezené součty a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom dle Abel-Dirichletova kritéria (Věta 4.23) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentní. $\square$

4.4 Přerovnání řad

Definice 4.27. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 4.28 (přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní a má stejný součet jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Důkaz. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, pro $\varepsilon > 0$ existuje dle Bolzano-Cauchyho podmínky pro konvergenci řad (Věta 4.20) $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : \left| \sum_{n+1}^{m} |a_i| \right| < \varepsilon.$$

Nyní chceme ukázat, že Bolzano-Cauchyho podmínka platí i pro přerovnanou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$. Pro již dané $\varepsilon > 0$ a zjištěné $n_0 \in \mathbb{N}$ zvolme $\widetilde{n_0} = \max_{i=1,\ldots,n_0} p(i)$. Nechť $m, n \geq \widetilde{n_0}$. Pak:

$$\left| \sum_{n+1}^{m} a_{p(i)} \right| \leq \sum_{n+1}^{m} |a_{p(i)}| \leq \sum_{n_0+1}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon.$$

□

Věta 4.29 (Riemann)**.** *Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu z $\mathbb{R}^*$. Neboli: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ a nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje bijekce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = A.$$

Důkaz. Bez důkazu. □

4.5 Součin řad

Definice 4.30. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. Cauchyovským součinem těchto řad nazveme řadu

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i \right).$$

Poznámka 4.31. Trochu jiný, ale ekvivalentní pohled: Cauchyovským součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}.$$

Potom:

$$\begin{aligned}
&c_1 \text{ není definováno}\\
&c_2 = a_1 b_1\\
&c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1\\
&c_4 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1\\
&\text{atd.}
\end{aligned}$$

Věta 4.32 (o součinu řad)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují absolutně. Pak:*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Důkaz. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutně konvergují, a proto existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < K$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < K$. Označme částečné součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a jejich součinu postupně s_n, σ_n a S_n. Platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dále, z aritmetiky limit posloupností (Věta 2.13) platí, že k pevnému $\varepsilon > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |s\sigma - s_n \sigma_n| < \varepsilon.$$

Pro již dané ε dále dle Bolzano-Cauchyho podmínky pro konvergenci řad (Věta 4.20) existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že :

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} |a_n| < \varepsilon, \sum_{n=n_2}^{\infty} |b_n| < \varepsilon.$$

Označme $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Potom:

$$\begin{aligned}
|S_n - s_{n_0}\sigma_{n_0}| &\leq \sum_{\substack{i,j=1\\ i\geq n_0 \vee j \geq n_0}}^{\infty} |a_i||b_i|\\
&\leq \left(\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i|\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right) + \left(\sum_{i=n_0}^{\infty} |b_i|\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\right)\\
&\leq \varepsilon \cdot K + K \cdot \varepsilon,
\end{aligned}$$

a tedy:

$$|S_n - s\sigma| \leq (2K+1)\varepsilon.$$

□