Lineární algebra II

Zápisky z přednášek Jiřího Fialy* na MFF UK, letní semestr, ak. rok 2007/2008

Adam Liška†

9. února 2015

*http://kam.mff.cuni.cz/~fiala
†http://www.adliska.com

Obsah

10 Permutace **3**

11 Determinant **6**
11.1 Definice a základní vlastnosti 6
11.2 Poznámky na konec 11

12 Vlastní čísla a vlastní vektory **13**
12.1 Úvod 13
12.2 Podobné a diagonizovatelné matice 14
12.3 Charakteristický mnohočlen 15

13 Pozitivně definitní matice **20**

14 Kvadratické formy **23**

10 Permutace

Definice 10.1. Permutace na množině $\{1, \dots, n\}$ je zobrazení $p : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, které je vzájemně jednoznačné. Množinu všech permutací na $\{1, \dots, n\}$ budeme značit S_n.

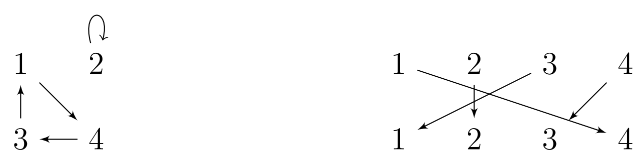
Poznámka 10.2 (Zápis permutace)**.**

- Tabulkou

i	1	2	3	4
$p(i)$	4	2	1	3

  či zkráceně jako $(4, 2, 1, 3)$.

- Grafem



- Permutační maticí $\mathbf{A_p}$:

$$(\mathbf{A_p})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } j = p(i), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

  V našem případě:

$$\mathbf{A_p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cykly: $(1, 4, 3)(2)$

Pozorování 10.3. *Skládání permutací není komutativní.*

Důkaz. Použijme zkrácený zápis tabulkou. Potom: $(1, 3, 2) \circ (2, 1, 3) = (3, 1, 2)$, kdežto $(2, 1, 3) \circ (1, 3, 2) = (2, 3, 1)$ $\square$

Definice 10.4. Mějme permutaci p. Permutace p^{-1} taková, že

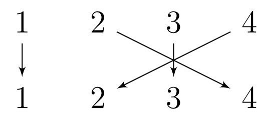
$$p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = id,$$

se nazývá inverzní permutace k permutaci p. Plyne, že $p(i) = j \iff p^{-1}(j) = i$.

Poznámka 10.5. K permutaci $p = (4, 2, 1, 3)$ z Poznámky 10.2 je inverzní permutací permutace $q = (3, 2, 4, 1)$.

Definice 10.6. Transpozice je taková permutace, která obsahuje jeden cyklus délky 2 a $n-2$ cyklů délky 1.

Poznámka 10.7. Transpozice je tedy taková permutace, ve které si dva prvky prohodí pozice a ostatní prvky se zobrazí na sebe, např.



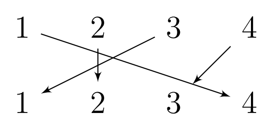
Pozorování 10.8. *Každou permutaci lze složit z transpozic.*

Důkaz. Indukcí podle součtu délek cyklů délky větší než 2. Použijeme zápis pomocí cyklů. V každém kroku rozdělíme cyklus $(1, \dots, k)$ délky k na cyklus $(1, k)$ délky 2 a cyklus $(1, \dots, k-1)$ délky $k-1$. Postupně lze takto každý cyklus $(1, \dots, k)$ délky k lze rozdělit na $k-1$ cyklů délky 2. □

Definice 10.9. Nechť p je permutace na množině $\{1, \dots, n\}$. Potom inverzí permutace p rozumíme každou dvojici $i, j \in \{1, \dots, n\} : i < j \wedge p(i) > p(j)$. Celkový počet inverzí permutace p budeme značit $I(p)$.

Poznámka 10.10. Vraťme se znovu k permutaci $p = (4, 2, 1, 3)$ z Poznámky 10.2. V této permutaci se nacházejí inverze $(1, 3), (1, 4), (1, 2)$ a $(2, 3)$.

Celkový počet inverzí pro permutaci zapsanou ve zkráceném zápise tabulkou, $(4, 2, 1, 3)$ lze vypočítat jednoduše: Bereme postupně čísla od začátku a ptáme se, kolik je před nimi větších čísel. Před 4 žádné, před 2 jedno, před 1 dvě, před 3 jedno. Proč tento postup funguje je zřejmé ze zápisu permutace grafem:



Definice 10.11. Znaménkem permutace p se rozumí číslo:

$$\operatorname{sgn}(p) \coloneqq (-1)^{I(p)}$$

Pozorování 10.12. $\forall p, q \in S_n : \operatorname{sgn}(p) \cdot \operatorname{sgn}(q) = \operatorname{sgn}(q \circ p)$

Důkaz. Ukážeme, že $\exists k \in \mathbb{Z} : I(q \circ p) = I(p) + I(q) + 2k$. Potom už jednoduše vyplyne, že

$$\operatorname{sgn}(q \circ p) = (-1)^{I(q \circ p)} = (-1)^{I(p)+I(q)+2k} = \\ (-1)^{I(p)} \cdot (-1)^{I(q)} \cdot (-1)^{2k} = (-1)^{I(p)} \cdot (-1)^{I(q)} = \operatorname{sgn}(p) \cdot \operatorname{sgn}(q)$$

Nechť $i < j$. Potom může nastat jedna z následujících možností:

$$(--)\colon\; p(i) < p(j) \wedge q(p(i)) < q(p(j)),$$

$$(-+)\colon\ p(i) < p(j) \wedge q(p(i)) > q(p(j)),$$

$$(+-)\colon\ p(i) > p(j) \wedge q(p(i)) > q(p(j)),$$

$$(++)\colon\ p(i) > p(j) \wedge q(p(i)) < q(p(j)),$$

kde $+$ značí přítomnost inverze v zobrazení p, resp. q, a $-$ její nepřítomnost. Takto přiřadíme každou dvojici prvků $i < j$ do příslušné přihrádky; výsledné počty prvků v jednotlivých přihrádkách označíme jako $I_{--}, I_{-+}, I_{+-}, I_{++}$.

Je zřejmé, že dvojice v přihrádkách $(+-)$ a $(++)$ představují inverze v p, dvojice v přihřádkách $(-+)$ a $(++)$ inverze v q a nakonec dvojice v přihrádkách $(-+)$ a $(+-)$ inverze v $q \circ p$. Můžeme tedy psát:

$$I(q \circ p) = I_{-+} + I_{+-} = (I_{-+} + I_{++}) + (I_{+-} + I_{++}) - 2 \cdot I_{++} = I(q) + I(p) + 2k.$$

$\square$

Důsledek 10.13. *Nechť $p \in S_n$. Potom* $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p^{-1})$.

Důkaz. $1 = \operatorname{sgn}(id) = \operatorname{sgn}(p^{-1} \circ p) = \operatorname{sgn}(p^{-1}) \operatorname{sgn}(p)$, z čehož nutně vyplývá, že $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p^{-1})$. $\square$

Pozorování 10.14. *Nechť $t \in S_n$ je transpozice. Potom* $\operatorname{sgn}(t) = -1$.

Důkaz. V transpozici se vyskytuje lichý počet inverzí:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & i \arrow[drr] & \cdots \arrow[d] & j \arrow[dll] & \cdots \arrow[d] & n \arrow[d] \\ 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \end{tikzcd}$$

$\square$

Důsledek 10.15. $sgn(p) = (-1)^{\#\ \textit{transposic v libovolném rozkladu } p} = (-1)^{\#\ \textit{sudých cyklů v } p}$

11 Determinant

11.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 11.1. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem K Potom determinant matice $\mathbf{A}$ je dán výrazem:

$$\det(\mathbf{A}) \coloneqq \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}.$$

Formálně jde o zobrazení $\det(\bullet) : K^{n\times n} \to K$.

Poznámka 11.2. Mějme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Množina všech permutací na množině $\{1,2\}$, t.j. S_2, obsahuje dva prvky: identitu $(1,2)$ se znaménkem 1 a transposici $(2,1)$ se znaménkem -1. Potom:

$$\det(\mathbf{A}) = (+1) \cdot a_{11}a_{22} + (-1) \cdot a_{12}a_{21}.$$

Pozorování 11.3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}^\top) &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{A}^\top)_{i,p(i)} && \text{(definice determinantu)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{p(i),i} && \text{(transpozice matice } \mathbf{A}\text{)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)} && \text{(při volbě } q = p^{-1}\text{)} \\
&= \sum_{q \in S_n} \operatorname{sgn}(q) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)} && (\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(q)\text{, Důsledek 10.13)} \\
&= \det(\mathbf{A}) && \text{(dle Definice 11.1)}
\end{aligned}$$

□

Pozorování 11.4. *Přerovnání sloupců matice* $\mathbf{A}$ *podle permutace* q*:*

- *nezmění* $\det(\mathbf{A})$, *je-li* $\operatorname{sgn}(q) = 1$,
- *změní znaménko* $\det(\mathbf{A})$, *je-li* $\operatorname{sgn}(q) = -1$.

Důkaz. Označme $\mathbf{A}'$ přerovnanou matice. Platí $a'_{ij} = a_{i,q^{-1}(j)}$. Dále:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}') &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a'_{i,p(i)} \\
&= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q^{-1}(p(i))} \\
&= \sum_{p\in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(q)\overbrace{\operatorname{sgn}(q^{-1})}_{}}_{=1}\!\!\!\!\!\!\!\!\overbrace{\phantom{\operatorname{sgn}(q^{-1})}\operatorname{sgn}(p)}^{=\operatorname{sgn}(q^{-1}\circ p)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,q^{-1}(p(i))} \\
&= \operatorname{sgn}(q) \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(q^{-1}\circ p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,(q^{-1}\circ p)(i)} \\
&= \operatorname{sgn}(q) \det(\mathbf{A})
\end{aligned}
$$

□

Poznámka 11.5 (Důsledky Pozorování 11.4)**.**

i. Stejné tvrzení platí i pro řádky, díky Pozorování 11.3 ($\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$).

ii. Záměna dvou řádků (sloupců) změní znaménko determinantu.

iii. Jsou-li dva řádky stejné, je determinant nulový.[1]

Tvrzení 11.6. *Determinant je lineární funkcí každého řádku i sloupce dané matice.*

i. Linearita vůči skalárnímu násobku:

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
ta_{i,1} & \dots & ta_{i,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
= t
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

ii. Linearita vůči sčítání:

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1}+b_{i,1} & \dots & a_{i,n}+b_{i,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
b_{i,1} & \dots & b_{i,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

[1] V tělesech charakteristiky 2 může být i -1.

Důkaz.

i. Linearita vůči skalárnímu násobku:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}') &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a'_{i,p(i)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p)(a_{1,p(1)} \cdot \ \dots \ \cdot t a_{i,p(i)} \cdot \ \dots \ \cdot a_{n,p(n)}) \\
&= t \det(\mathbf{A})
\end{aligned}
$$

ii. Analogicky.

□

Důsledek 11.7. *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ *a* $i, j \leq n, i \neq j$*. Potom přičtení* t*-násobku* j*-tého řádku k* i*-tému nezmění determinant.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}'$ je výsledná matice. Potom dle Tvrzení 11.6:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}') &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} + t a_{j,1} & \dots & a_{i,n} + t a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}_{=\det(\mathbf{A})} + t \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}_{=\det(\mathbf{B})} \\
&= \det(\mathbf{A})
\end{aligned}
$$

Matice označená jako $\mathbf{B}$ má na místě i-tého řádku kopii řádku j-tého. Jelikož má dva řádky stejné, její determinant je roven nule (podle bodu iii. Poznámky 11.5). □

Poznámka 11.8 (Výpočet determinantu)**.** Matici převedeme na trojúhelníkovou přičítáním t-násobků jiných řádku, podobně jako při Gaussově eliminaci. Potom

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Pamatujme, že:

- buď neměníme pořadí řádků, anebo si pamatujeme změnu znaménka.

- nenásobíme řádky t, neboť by se determinant změnil t-krát.
- lze upravovat i po sloupcích.

Takto lze vypočítat determinant v polynomiálním čase $\mathcal{O}(n^3)$, podobně jako Gaussova eliminace.

Věta 11.9. *Nechť* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou čtvercové matice nad* T. *Potom platí:*

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}).$$

Důkaz. Je-li $\mathbf{A}$ nebo $\mathbf{B}$ singulární, je i jejich součin singulární. Potom $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0 = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

Předpokládejme, že matice $\mathbf{A}$ je regulární. Rozložíme $\mathbf{A}$ jako součin matic elementárních úprav: $\mathbf{A} = \mathbf{E_1} \mathbf{E_2} \dots \mathbf{E_k}$. Potom:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E_1} \mathbf{E_2} \dots \mathbf{E_k} \mathbf{B}) \\
&\overset{*}{=} \det(\mathbf{E_1}) \det(\mathbf{E_2} \dots \mathbf{E_k} \mathbf{B}) \\
&= \det(\mathbf{E_1}) \dots \det(\mathbf{E_n}) \det(\mathbf{B}) && \text{(iterací předchozího kroku)} \\
&= \det(\underbrace{\mathbf{E_1} \dots \mathbf{E_n}}_{\mathbf{A}}) \det(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

Rovnítko s hvězdičkou platí, jelikož:

- pokud je $\mathbf{E_1}$ matice záměny dvou řádku, je $\det(\mathbf{E_1} \mathbf{C}) = -1 \det(\mathbf{C})$ a $\det(\mathbf{E_1}) \det(\mathbf{C}) = -1 \det(\mathbf{C})$,
- pokud je $\mathbf{E_1}$ matice vynásobení řádku skalárem t, potom $\det(\mathbf{E_1} \mathbf{C}) = t \det(\mathbf{C})$ a $\det(\mathbf{E_1}) \det(\mathbf{C}) = t \det(\mathbf{C})$,
- pokud je $\mathbf{E_1}$ matice přičtení j-tého řádku k i-tému, potom $\det(\mathbf{E_1} \mathbf{C}) = 1 \det(\mathbf{C})$ a $\det(\mathbf{E_1}) \det(\mathbf{C}) = 1 \det(\mathbf{C})$.

$\square$

Věta 11.10. *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *je regulární, právě když* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Důsledek 11.11. *Je-li matice* $\mathbf{A}$ *regulární, potom:*

$$\det(\mathbf{A^{-1}}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

Důkaz.

$$1 = \det(\mathbf{I_n}) = \det(\mathbf{A} \mathbf{A^{-1}}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A^{-1}})$$

$\square$

Pozorování 11.12 (Rozvoj determinantu podle i-tého řádku)**.** *Nechť* $\mathbf{A^{ij}}$ *značí matici, která vznikne z* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak platí pro libovolné* $i \in \{1,\dots,n\}$*:*

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A^{ij}}).$$

Důkaz.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \qquad \text{(Tvrzení 11.6)}$$

$$= a_{i1}\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + a_{i2}\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \dots + a_{in}\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \qquad \text{(Tvrzení 11.6)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A^{ij}}) \qquad \text{(viz výklad níže)}$$

Uvažujme následující matici:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tj., matici $\mathbf{A}$, jejíž i-tý řádek obsahuje v j-tém sloupci jedničku a jinak nuly. Postupným vyměňováním řádků $(i, i+1), \dots, (n-1, n)$ se posune i-tý řádek na konec matice. Podobně přesuneme j-tý sloupec na konec matice a získáme matici:

$$\mathbf{C}' = \left(\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{A^{ij}} & & \\ & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

jejíž determinant je roven $\det(\mathbf{A^{ij}})$. Při přesouvání řádků a sloupců jsme využili $(n-i)+(n-j)$ transpozic, a tudíž:

$$\det(\mathbf{C}) = (-1)^{(n-i)+(n-j)} \det(\mathbf{A^{ij}}) = (-1)^{(i+j)} \det(\mathbf{A^{ij}}).$$

$\square$

Definice 11.13. Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ definujeme adjungovanou matici $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$:

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A})_{ij} = (-1)^{i+j}(\det(\mathbf{A^{ji}}))$$

(Poznámka: Všimněte si prohozeného pořadí indexů.)

Věta 11.14. *Pro každou regulární matici $\mathbf{A}$ nad tělesem T platí:*

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}).$$

Důkaz. Z Pozorování 11.12 plyne, že

$$i\text{-tý řádek } \mathbf{A} \cdot i\text{-tý sloupec } \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$$

Podobně:

$$k\text{-tý řádek } \mathbf{A} \cdot i\text{-tý sloupec } \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \\ \text{determinant matice vzniklé z } \mathbf{A} \text{ překopírováním } k\text{-tého řádku na } i\text{-tý}$$

Výraz $\mathbf{A} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$ je tedy roven matici, která má na diagonále $\det(\mathbf{A})$ a mimo diagonálu nuly. □

Věta 11.15 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice. Řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lze zapsat jako:*

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A_{i\to b}})}{\det(\mathbf{A})},$$

kde $\mathbf{A_{i\to b}}$ je matice, která vznikne z $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$.

Důkaz.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A})\mathbf{b}$$
$$\implies x_i = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}(\mathrm{adj}(\mathbf{A})\mathbf{b})_i = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))_{ij}b_j = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\det(\mathbf{A_{i\to b}})$$

□

11.2 Poznámky na konec

Poznámka 11.16 (Různé druhy obalů)**.** Nechť $X = \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$ je konečná množina v $\mathbb{R}^n$. Definujme následující obaly:

- Lineární obal: $\mathrm{span}(X) = \{\sum a_i\mathbf{x_i}, a_i \in \mathbb{R}\}$
- Afinní obal: $\mathrm{aff}(X) = \{\sum a_i\mathbf{x_i}, a_i \in \mathbb{R}, \sum a_i = 1\}$

- Konvexní obal: $\mathrm{conv}(X) = \{\sum a_i \mathbf{x_i}, a_i \in \mathbb{R}, \sum a_i = 1, a_i \in [0,1]\}$
- Rovnoběžnostěn: $\mathrm{P}(X) = \{\sum a_i \mathbf{x_i}, a_i \in \mathbb{R}, a_i \in [0,1]\}$

Poznámka 11.17 (Geometrický význam determinantu)**.** $|\det(\mathbf{A})|$ udává objem rovnoběžnostěnu určeného řádky nebo sloupci matice $\mathbf{A}$.

Pozorování 11.18. *Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení a $\mathbf{A}$ je matice tohoto zobrazení, potom platí, že objem těles se mění podle předpisu:*

$$\mathrm{vol}(f(V)) = |\det(\mathbf{A})| \underbrace{\mathrm{vol}(V)}_{\textit{původní objem}} .$$

12 Vlastní čísla a vlastní vektory

12.1 Úvod

Definice 12.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $f : V \to V$ je lineární zobrazení. Potom $\lambda \in T$, pro nějž existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in V$ takový, že $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, nazveme vlastním číslem zobrazení f.

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ je každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in V$ splňující $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.

Je-li $\dim(V) = n < \infty$, potom lze f reprezentovat maticí zobrazení $\mathbf{A} \in T^{n\times n}$ a můžeme předchozí definici rozšířit i na matice.

Množina všech vlastních čísel matice či zobrazení se nazývá spektrum.

Pozorování 12.2. *Množina vlastních vektorů příslušných k pevnému vlastnímu číslu λ tvoří podprostor V.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ. Potom: $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}) = \lambda c\mathbf{x}$ a $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. □

Poznámka 12.3 (Geometrický význam vlastních vektorů)**.** Vlastní vektory jsou vektory, které nemění směr při zobrazení f.

Věta 12.4. *Nechť $f : V \to V$ je lineární zobrazení, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla zobrazení f a $\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_k}$ jsou některé vlastní vektory příslušné k $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Potom $\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_k}$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Větu dokážeme indukcí a sporem zároveň.

Pro $k = 1$ věta platí triviálně.

Předpokládejme, že věta platí pro $k-1$, a předpokládejme dále, že $\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_k}$ jsou lineárně závislé, t.j. $\exists a_1, \dots, a_n : \sum_{i=1}^{k} a_i\mathbf{x_i} = \mathbf{0}$. Potom:

$$\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) = f(\sum_{i=1}^{k} a_i\mathbf{x_i}) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(\mathbf{x_i}) = \sum_{i=1}^{k} a_i\lambda_i x_i$$

a

$$\mathbf{0} = \lambda_k\mathbf{0} = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i\mathbf{x_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i\lambda_k\mathbf{x_i}.$$

Potom:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} a_i\lambda_i\mathbf{x_i} - \sum_{i=1}^{k} a_i\lambda_k\mathbf{x_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i(\lambda_i - \lambda_k)\mathbf{x_i} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i\lambda_i\mathbf{x_i}.$$

Tedy, $\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_{k-1}}$ jsou lineárně závislé, což je spor s předpoklady. □

Důsledek 12.5. *Čtvercová matice řádu n může mít nejvýše n vlastních čísel.*

12.2 Podobné a diagonizovatelné matice

Poznámka 12.6. Vztah zobrazení f a matice zobrazení $\mathbf{A} = [f]_{XX}$ není jednoznačný, jelikož matice zobrazení závisí na volbě báze X. Všechny matice zobrazení ovšem musejí mít stejná vlastní čísla (jelikož ta jsou daná zobrazením). Mějme dvě různé báze X a Y. Potom:

$$[f(\mathbf{u})]_X = [f]_{XX}[\mathbf{u}]_X$$
$$[f(\mathbf{u})]_X = [id]_{YX}[f]_{YY}[id]_{XY}[\mathbf{u}]_X$$

a tedy:

$$[f]_{XX} = [id]_{YX}[f]_{YY}[id]_{XY}.$$

Definice 12.7. Čtvercové matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného řádu se nazývají podobné, pokud existuje regulární matice $\mathbf{R}$ taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{R^{-1}BR}$.

Věta 12.8. *Jsou-li matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ podobné, t.j. $\mathbf{A} = \mathbf{RBR^{-1}}$, λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x}$ je příslušný vlastní vektor, tak potom λ je také vlastní číslo matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{Rx}$ je příslušný vlastní vektor matice $\mathbf{B}$.*

Důkaz. $\mathbf{By} = \underbrace{\mathbf{RAR^{-1}}}_{\mathbf{B}}\underbrace{\mathbf{Rx}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{RAx} = \mathbf{R}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Rx} = \lambda\mathbf{y}$ □

Pozorování 12.9. *Vlastní čísla diagonální matice jsou prvky na diagonále a vlastní vektory jsou příslušné vektory kanonické báze.*

Definice 12.10. Matice se nazývá diagonizovatelná, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

Poznámka 12.11 (Užití diagonalizace)**.**

- Snadný popis vlastních čísel a vlastních vektorů: $\lambda_i = (\mathbf{D})_{ii}$, $\mathbf{e_i}$ je příslušný vlastní vektor.
- Snadný výpočet mocnin: Nechť $\mathbf{A} = \mathbf{R^{-1}DR}$. Potom:

  $$\mathbf{A}^n = (\mathbf{R^{-1}DR})(\mathbf{R^{-1}DR})\dots(\mathbf{R^{-1}DR}) = \mathbf{R^{-1}D}^n\mathbf{R},$$

  kde $(\mathbf{D}^n)_{ii} = ((\mathbf{D})_{ii})^n$.

Věta 12.12. *Pokud má matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ n různých vlastních čísel, tak potom je diagonizovatelná.*

Důkaz. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ příslušné lineárně nezávislé vektory. Sestavme matici $\mathbf{R}$, jejíž sloupce jsou vektory $\mathbf{x}_1$ až $\mathbf{x}_n$. Tato matice je regulární, jelikož je sestavena z lineárně nezávislých vektorů (viz Větu 12.4). Potom $\mathbf{AR} = \mathbf{RD}$, kde:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

a $\mathbf{D} = \mathbf{R^{-1}AR}$. □

Věta 12.13. *Matice* $\mathbf{A} \in T^{n\times n}$ *je diagonizovatelná, právě když má* n *lineárně nezávislých vlastních vektorů.*

Důkaz.

$\implies$ Existuje $\mathbf{R}$ regulární: $\mathbf{R^{-1}AR} = \mathbf{D}$, neboli $\mathbf{AR} = \mathbf{RD}$. Sloupce $\mathbf{R}$ jsou vlastní vektory a ty jsou lineárně nezávislé, jelikož $\mathbf{R}$ je regulární.

$\impliedby$ Z vlastních vektorů sestavíme $\mathbf{R}$, ta je regulární: $\mathbf{AR} = \mathbf{RD}$ a $\mathbf{R^{-1}AR} = \mathbf{D}$.

□

12.3 Charakteristický mnohočlen

Definice 12.14. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice nad tělesem T. Potom charakteristický mnohočlen v proměnné t je dán předpisem:

$$p_{\mathbf{A}}(t) \coloneqq \det(\mathbf{A} - t\mathbf{I_n})$$

Věta 12.15. *Pro matici* $\mathbf{A} \in T^{n\times n}$ *platí:* $\lambda \in T$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$*, právě když je kořenem charakteristického mnohočlenu.*

Důkaz. λ je vlastní číslo $\mathbf{A}$ $\iff$ $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ $\iff$ $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{I_n x} = \mathbf{0}$ $\iff$ $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I_n})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\iff$ matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I_n}$ je singulární $\iff$ $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I_n}) = 0$ $\iff$ $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ $\iff$ λ je kořenem $p_{\mathbf{A}}(t)$. □

Tvrzení 12.16. *Podobné matice mají stejné charakteristické mnohočleny.*

Důkaz. Uvažujme $\mathbf{A} = \mathbf{R^{-1}BR}$. Potom

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}}(t) &= \det(\mathbf{A} - t\mathbf{I_n}) \\
&= \det(\mathbf{R^{-1}BR} - t\mathbf{R^{-1}I_nR}) && \text{(Věta 11.9)} \\
&= \det(\mathbf{R^{-1}}(\mathbf{B} - t\mathbf{I_n})\mathbf{R}) \\
&= \det(\mathbf{R^{-1}})\det(\mathbf{B} - t\mathbf{I_n})\det(\mathbf{R}) && \text{(Věta 11.9, Důsledek 11.11)} \\
&= \det(\mathbf{B} - t\mathbf{I_n}) \\
&= p_{\mathbf{B}}(t)
\end{aligned}$$

□

Tvrzení 12.17. *Pro libovolné čtvercové matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *mají matice* $\mathbf{AB}$ *a* $\mathbf{BA}$ *stejná vlastní čísla.*

Důkaz. Použijeme pravidlo pro násobení blokových matic:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{ABA} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BA} \end{pmatrix}$$

Tedy, $\begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ je podobná $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BA} \end{pmatrix}$, tím pádem mají stejné charakteristické mnohočleny:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{AB} - t\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -t\mathbf{I} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{AB} - t\mathbf{I}) \cdot (-t)^n = p_{\mathbf{AB}}(t) \cdot (-t)^n$$
$$\det \begin{pmatrix} -t\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BA} - t\mathbf{I} \end{pmatrix} = (-t)^n \det(\mathbf{BA} - t\mathbf{I}) = (-t)^n \cdot p_{\mathbf{BA}}(t)$$

Vyplývá, že $p_{\mathbf{AB}}(t) = p_{\mathbf{BA}}(t)$. □

Věta 12.18 (Základní věta algebry)**.** *Každý mnohočlen stupně alespoň 1 v $\mathbb{C}$ má alespoň jeden kořen.*

Důkaz. Důkaz je poměrně těžký – větu necháme bez důkazu. □

Důsledek 12.19. *Každý komplexní mnohočlen lze rozložit na součin jednočlenů.*

Důkaz. Nechť $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ je komplexní mnohočlen a λ_1 jeho kořen. Jelikož $p(t)$ je dělitelný $(t - \lambda_1)$ beze zbytku, je $\frac{p_{\mathbf{A}}(t)}{t-\lambda_1}$ opět mnohočlen, stupně $n-1$. $p_{\mathbf{A}}(t)$ lze tedy rozložit:

$$p_{\mathbf{A}}(t) = a_n (t - \lambda_1)^{r_1} \cdot (t - \lambda_2)^{r_2} \dots (t - \lambda_k)^{r_k},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $r_1 + \cdots + r_k = n$. Číslo r_i se nazývá násobnost kořene λ_i. □

Pozorování 12.20. *Nechť $p_{\mathbf{A}}(t) = \det(\mathbf{A} - t\mathbf{I_n})$. Potom lze $p_{\mathbf{A}}(t)$ vyjádřit jako:*

$$p_{\mathbf{A}}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Platí:

i. $a_n = (-1)^n$

ii. $a_0 = \lambda_1^{r_1} \cdot \lambda_2^{r_2} \dots \lambda_k^{r_k} = \det(\mathbf{A})$

iii. $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_k r_k) = (-1)^{n-1}((\mathbf{A})_{11} + (\mathbf{A})_{22} + \cdots + (\mathbf{A})_{nn})$

Důkaz.

i. Veškerá $(-t)$ se vyskytují na diagonále a existuje pouze jeden způsob, jak je vybrat.

ii. Po dosazení $t = 0 : p_{\mathbf{A}}(0) = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_k^{r_k}$.

iii. $t^{(n-1)}$ lze ze součinu $(t - \lambda_1)^{r_1} \dots (t - \lambda_k)^{r_k}$ získat n způsoby; každý dává λ_i. Navíc, z definice determinantu, t^{n-1} lze získat pouze ze součinu odpovídajícímu identitě: $(t - (\mathbf{A})_{11}) \dots (t - (\mathbf{A})_{nn})$ (není možné "uhnout" z diagonály).

□

Tvrzení 12.21. *Matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je diagonizovatelná, právě když pro každé vlastní číslo* λ_i *platí:*

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I_n})) = r_i.$$

Důkaz. Matice $\mathbf{A}$ je diagonizovatelná, právě když existuje báze v $\mathbb{C}^n$ složená z vlastních vektorů. Pro vektory v prostoru $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I_n})$ platí: $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I_n})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, a tedy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$.

Z takto získaných vektorů složíme regulární matici $\mathbf{R}$ a potom $\mathbf{AR} = \mathbf{RD}$. □

Poznámka 12.22. Existují matice, které nejsou diagonizovatelné. Například:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tato matice má jedno vlastní číslo $\lambda = 1$ násobnosti 2. Pokud by byla diagonizovatelná, musela by být podobná matici $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom: $\mathbf{A} = \mathbf{R^{-1}DR} = \mathbf{I_2}$ a dostáváme spor.

Definice 12.23. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$. Jordanova buňka $J_k(\lambda)$ je čtvercová matice řádu k následujícího tvaru:

$$\mathbf{J_k}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definice 12.24. Matice $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je v Jordanově normální formě, pokud je v blokově diagonálním tvaru a bloky na diagonále jsou Jordanovy buňky:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J_{k_1}}(\lambda_\mathbf{1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{J_{k_m}}(\lambda_\mathbf{m}) \end{pmatrix}$$

Věta 12.25. *Každá matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je podobná matici v Jordanově normální formě.*

Důkaz. Bez důkazu. □

Definice 12.26. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Matici $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$, pro níž platí $(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})_{ij} = \overline{a_{ji}}$, nazýváme hermitovskou transpozicí matice $\mathbf{A}$.

Pozorování 12.27. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{H}} = \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$*, pokud je operace definována.*

Důkaz. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{H}}_{ij} = \overline{(\mathbf{AB})_{ji}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{jk} \cdot \mathbf{B}_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathbf{A}_{jk}} \cdot \overline{\mathbf{B}_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}^{\mathrm{H}}_{ik} \mathbf{A}^{\mathrm{H}}_{kj} = (\mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}})_{ij}$ □

Pozorování 12.28. *Standardní skalární součin na $\mathbb{C}^n$ je možno zapsat jako:*

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \mathbf{y}^{\mathrm{H}} \mathbf{x}.$$

Pozorování 12.29. *Je-li matice $\mathbf{A}$ složena z vektorů ortonormální báze $\mathbb{C}^n$ (vůči standardnímu skalárnímu součinu), tak platí:*

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \mathbf{A} = \mathbf{I_n}.$$

Definice 12.30. Komplexní čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá unitární, pokud $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \mathbf{A} = \mathbf{I_n}$.

Definice 12.31. Komplexní čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá hermitovská, pokud $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$.

Poznámka 12.32. Hermitovské matice představují komplexní analogii reálných symetrických matic. Uvědomme si navíc, že na diagonále hermitovské matice jsou reálná čísla.

Věta 12.33. *Nechť $\mathbf{A}$ je hermitovská matice. Potom:*

i. všechna její vlastní čísla jsou reálná, a

ii. existuje unitární matice $\mathbf{R}$ taková, že $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}$ je diagonální.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle řádu matice n. Označme $\mathbf{A_n} = \mathbf{A}$. Buď λ vlastní číslo $\mathbf{A}$ (jeho existence plyne ze základní věty algebry) a $\mathbf{x}$ příslušný normovaný vlastní vektor, $\|\mathbf{x}\| = 1$. Doplníme $\mathbf{x}$ na ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$ a z těchto vektorů sestavíme unitární matici $\mathbf{P_n} = (\mathbf{x}| \dots)$. Potom platí:

$$(\mathbf{P_n}^{\mathrm{H}} \mathbf{A_n} \mathbf{P_n})^{\mathrm{H}} = \mathbf{P_n}^{\mathrm{H}} \underbrace{\mathbf{A_n}^{\mathrm{H}}}_{=\mathbf{A_n}} \underbrace{(\mathbf{P_n}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}}_{=\mathbf{P_n}} = \mathbf{P_n}^{\mathrm{H}} \mathbf{A_n} \mathbf{P_n},$$

a tedy matice $\mathbf{P_n}^{\mathrm{H}} \mathbf{A_n} \mathbf{P_n}$ je hermitovská. Jelikož první sloupec součinu $\mathbf{A_n} \mathbf{P_n}$ je λ-násobek $\mathbf{x}$, platí, že:

$$\mathbf{P_n}^{\mathrm{H}} \mathbf{A_n} \mathbf{P_n} = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

kde $\mathbf{A_{n-1}}$ je hermitovská a λ je reálné.

Z indukce, pro $\mathbf{A_{n-1}}$ existuje unitární matice $\mathbf{R_{n-1}}$ taková, že $\mathbf{R_{n-1}^{-1}} \mathbf{A_{n-1}} \mathbf{R_{n-1}} = \mathbf{D_{n-1}}$. Položme:

$$\mathbf{S_n} \coloneqq \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Tato matice je unitární a její sloupce tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$. Vezměme dále $\mathbf{R_n} \coloneqq \mathbf{P_n}\mathbf{S_n}$. $\mathbf{P_n}$ je unitární (jelikož tak byla sestavena). I matice $\mathbf{R_n}$ je unitární, jelikož $\mathbf{R_n}^{\mathrm{H}}\mathbf{R_n} = (\mathbf{P_n}\mathbf{S_n})^{\mathrm{H}}(\mathbf{P_n}\mathbf{S_n}) = \mathbf{S_n}^{\mathrm{H}}\mathbf{P_n}^{\mathrm{H}}\mathbf{P_n}\mathbf{S_n} = \mathbf{I_n}$.

Zbývá ověřit, že $\mathbf{R_n^{-1}}\mathbf{A_n}\mathbf{R_n} = \mathbf{D_n}$:[2]

$$\begin{aligned}
\mathbf{R_n}^{\mathrm{H}}\mathbf{A_n}\mathbf{R_n} &= \mathbf{S_n}^{\mathrm{H}}\mathbf{P_n}^{\mathrm{H}}\mathbf{A_n}\mathbf{P_n}\mathbf{S_n} \\
&= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R_{n-1}}^{\mathrm{H}} & \\ 0 & & & \end{array}\right)
\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array}\right)
\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{D_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \mathbf{D_n}
\end{aligned}$$

□

Pozorování 12.34. *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem konečné dimenze a $X = \{\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}\}$ je jeho libovolná ortonormální báze. Potom:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u} | \mathbf{x_i} \rangle \langle \mathbf{x_i} | \mathbf{v} \rangle = [\mathbf{v}]_X^{\mathrm{H}} [\mathbf{u}]_X.$$

Důkaz. $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x_i}, \alpha_i = \langle \mathbf{u} | \mathbf{x_i} \rangle = ([\mathbf{u}]_X)_i, \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{x_i}, \beta_i = \langle \mathbf{v} | \mathbf{x_i} \rangle = ([\mathbf{v}]_X)_i, \overline{\beta_i} = \langle \mathbf{x_i} | \mathbf{v} \rangle$. Dále:

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x_i} | \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{x_i} \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} \langle \mathbf{x_i} | \mathbf{x_j} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} && (X \text{ je ortonormální báze})
\end{aligned}$$

□

Tvrzení 12.35. *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze se skalárním součinem, $X = \{\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}\}$ je jeho ortonormální báze a $f : V \to V$ je lineární zobrazení.*

Pak platí, že f zachovává skalární součin, t.j. $\langle f(\mathbf{u}) | f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$, právě když $[f]_{XX}$ je unitární.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\langle f(\mathbf{u}) | f(\mathbf{v}) \rangle &= [f(\mathbf{v})]_X^{\mathrm{H}} [f(\mathbf{u})]_X && \text{(Pozorování 12.34)} \\
&= ([f]_{XX}[\mathbf{v}]_X)^{\mathrm{H}} [f]_{XX} [\mathbf{u}]_X \\
&= [\mathbf{v}]_X^{\mathrm{H}} [f]_{XX}^{\mathrm{H}} [f]_{XX} [\mathbf{u}]_X
\end{aligned}$$

□

[2] Uvědomme si, že pro každou unitární matici $\mathbf{R}$ platí: $\mathbf{R^{-1}} = \mathbf{R}^{\mathrm{H}}$.

13 Pozitivně definitní matice

Pozorování 13.1. *Nechť $V \cong \mathbb{C}^n$ je prostor se skalárním součinem. Potom existuje matice $\mathbf{E}$ taková, že $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}^{\mathrm{H}}\mathbf{E}\mathbf{u}$.*

Důkaz. Vezmeme kanonickou bázi $\mathbb{C}^n$: $\{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$. Potom:

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e_i} | \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e_j}\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} u_i \overline{v_j} \langle \mathbf{e_i}|\mathbf{e_j}\rangle$$

a tedy lze vzít $(\mathbf{E})_{ij} = \langle \mathbf{e_i}|\mathbf{e_j}\rangle$. □

Poznámka 13.2. Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} u_i$ máme $\mathbf{E} = \mathbf{I_n}$.

Pozorování 13.3. *Matice $\mathbf{E}$ je hermitovská.*

Definice 13.4. Splňuje-li hermitovská matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vlastnost, že $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$: $\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, tak potom se nazývá pozitivně definitní.

Věta 13.5. *Pro hermitovskou matice $\mathbf{A}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

i. *$\mathbf{A}$ je pozitivně definitní.*

ii. *$\mathbf{A}$ má všechny vlastní čísla kladná.*

iii. *Existuje regulární matice $\mathbf{U}$ taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{U}$.*

Důkaz.

$1 \implies 2$: Nechť $\mathbf{x}$ je vlastní vektor k vlastnímu číslu λ. Potom:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \implies \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}$$

$\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, a tedy $\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$. Jelikož výsledkem výrazu $\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}$ je vždy kladné číslo, musejí i vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ být kladná.

$2 \implies 3$: Jelikož $\mathbf{A}$ je hermitovská, existuje unitární matice $\mathbf{R}$ taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{\mathrm{H}}\mathbf{D}\mathbf{R}$, kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice s kladnou diagonálou (viz 12.33). Vezmu:

$$(\widetilde{\mathbf{D}})_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(\mathbf{D})_{ii}} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Potom $\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{R}$ je regulární (jelikož jak $\widetilde{\mathbf{D}}$, tak $\mathbf{R}$ jsou regulární) a

$$\mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{U} = (\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{R})^{\mathrm{H}}\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathrm{H}}\widetilde{\mathbf{D}}^{\mathrm{H}}\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathrm{H}}\mathbf{D}\mathbf{R} = \mathbf{A}.$$

$3 \implies 1$: $\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{U}\mathbf{x} = (\mathbf{U}\mathbf{x})^{\mathrm{H}}\mathbf{U}\mathbf{x} > 0$, kde vektor $\mathbf{x}$ je netriviální, $\mathbf{U}$ je regulární a tedy $\mathbf{U}\mathbf{x}$ je netriviální.

$\square$

Definice 13.6. Nechť matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní a nechť $\mathbf{U}$ je trojúhelníková matice s kladnou diagonálou taková, že $\mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{U} = \mathbf{A}$. Tento rozklad pozitivně definitní matice se nazývá Choleského rozklad.

Tvrzení 13.7. *Pro pozitivně definitní matici* $\mathbf{A}$ *existuje právě jedna trojúhelníková matice s kladnou diagonálou* $\mathbf{U}$ *taková, že* $\mathbf{A} = \mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{U}$.

Důkaz. Důkaz provedeme sestavením algoritmu, jehož vstupem je hermitovská matice a výstupem její Choleského rozklad nebo tvrzení, že daná matice není positivně definitní.

Pro $i := 1, \ldots, n$ proveď:

$$(\mathbf{U})_{ii} := \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}} u_{ki}}.$$

Pokud $u_{ii} = 0$ nebo $u_{ii} \notin \mathbb{R}$, stop: $\mathbf{A}$ není positivně definitní.

Pro $j := (i+1), \ldots, n$ proveď:

$$u_{ij} := \frac{1}{u_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}} u_{kj}).$$

$\square$

Tvrzení 13.8 (Rekurentní podmínka na test pozitivní definitnosti)**.** *Bloková matice*

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{a}^{\mathrm{H}} \\ \hline \mathbf{a} & \widetilde{\mathbf{A}} \end{array}\right)$$

je pozitivně definitní, právě když $\alpha > 0$ *a* $\widetilde{\mathbf{A}} - \frac{1}{\alpha}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}$ *je pozitivně definitní.*

Důkaz.

$\Longleftarrow$: Nechť $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ je libovolný netriviální vektor. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \left(\overline{x_1} | \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{a}^{\mathrm{H}} \\ \hline \mathbf{a} & \widetilde{\mathbf{A}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \widetilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \\ &= \left(\alpha\overline{x_1} + \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}, \overline{x_1}\mathbf{a}^{\mathrm{H}} + \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\widetilde{\mathbf{A}}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \widetilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \\ &= \alpha\overline{x_1}x_1 + x_1\widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\mathbf{a} + \overline{x_1}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\widetilde{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}} - \frac{1}{\alpha}\widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\widetilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{\alpha}\widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\widetilde{\mathbf{x}} \\ &= \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{H}})\widetilde{\mathbf{x}} + (\sqrt{\alpha}\overline{x_1} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\widetilde{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{a})(\sqrt{\alpha}x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\widetilde{x}) \end{aligned}$$

První člen nezáporný; je kladný, je-li vektor $\widetilde{x}$ netriviální. Druhý člen představuje součin komplexně sdružených čísel a je tedy také nezáporný. Alespoň jedna z těchto dvou nerovností ovšem musí být ostrá.

$\Longrightarrow$: $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, $\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro všechny netriviální $\mathbf{x}$ a tedy speciálně pro $\mathbf{e_1} : \mathbf{e_1}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{e_1} = \alpha > 0$ Nechť $\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{n-1}$ je libovolný vektor. Zvolíme $x_1 \coloneqq -\frac{1}{\alpha}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\widetilde{vx}$ a položíme $\mathbf{x} \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ \widetilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$. Potom

$$
\begin{aligned}
0 &< \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} \\
&= \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{H}})\widetilde{\mathbf{x}} + (\sqrt{\alpha}\overline{x_1} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\widetilde{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{a})(\sqrt{\alpha}x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\widetilde{x}), \quad \text{(už spočteno dříve)}
\end{aligned}
$$

kde druhý člen po dosazení x_1 je roven nule a první člen tedy musí být kladný.

□

Tvrzení 13.9 (Jakobiho podmínka)**.** *Hermitovská matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když mají matice* $\mathbf{A_n}, \mathbf{A_{n-1}}, \dots, \mathbf{A_1}$ *kladný determinant, kde* $\mathbf{A_i}$ *značí matici vzniklou z* $\mathbf{A}$ *vymazáním posledních* $n - i$ *řádků a sloupců.*

Poznámka 13.10. Z výpočetního hlediska není tento test efektivní.

14 Kvadratické formy

Definice 14.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $f : V \times V \to K$ splňuje:

- $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : f(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}', \mathbf{v})$
- $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V : f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}') = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$

Pak se f nazývá bilineární forma na V.

Definice 14.2. Bilineární forma f je symetrická, platí-li:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

Definice 14.3. Zobrazení $g : V \to K$ se nazývá kvadratická forma, pokud $g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ pro nějakou bilineární formu f.

Poznámka 14.4. Proč se kvadratická forma jmenuje kvadratická?

$$g(\alpha\mathbf{u}) = f(\alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{u}) = \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha^2 g(\mathbf{u})$$

Definice 14.5. Je-li V prostor konečné dimenze nad K a $X = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ je jeho báze, tak pro bilineární formu $f : V \times V \to K$ definujeme matici $\mathbf{B}$ formy f vzhledem k bázi X:

$$b_{i,j} \coloneqq f(\mathbf{v_i}, \mathbf{v_j})$$

Definice 14.6. Maticí kvadratické formy g rozumíme matici symetrické formy f, která formu g vytvořuje.

Poznámka 14.7. Vytvořující bilineární forma f musí být symetrická, abychom získali jednoznačně definovanou matici kvadratické formy.

Pozorování 14.8. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K, $X = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ je jeho konečná báze, $g : V \to K$ kvadratická forma a $\mathbf{B}$ je její matice vzhledem k bázi X. Potom*

$$g(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}]_X^\top \mathbf{B} [\mathbf{u}]_X$$

Důkaz. $[\mathbf{u}]_X = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top$, neboli $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v_i}$. Potom:

$$g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v_i}, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v_j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j f(\mathbf{v_i}, \mathbf{v_j}) = [\mathbf{u}]_X^\top \mathbf{B} [\mathbf{u}]_X$$

$\square$

Definice 14.9. Analytické vyjádření bilineární formy $f : V \times V \to K$ vůči konečné bázi X je polynom:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j,$$

kde x_i a y_j jsou souřadnice vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ vůči bázi X.

Podobně, pro kvadratickou formu:

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 2b_{ij} & i \neq j \\ b_{ij} & i = j \end{cases}$$

Poznámka 14.10. Přechod od analytického vyjádření k matici je snadný, ale pouze v tělesech s charakteristikou větší než 2.

Pozorování 14.11. *Nechť $g : V \to K$ je kvadratická forma a $\mathbf{B}$ je její matice vůči bázi X. Potom $\mathbf{B'} = [id]_{YX}^{\top} \cdot \mathbf{B} \cdot [id]_{YX}$ je matice téže formy vůči bázi Y.*

Důkaz. $g(\mathbf{u}) = [u]_X^{\top} \mathbf{B} [\mathbf{u}]_X = ([id]_{YX}[\mathbf{u}]_X)^{\top} \mathbf{B} [id]_{YX} [\mathbf{u}]_Y = [\mathbf{u}]_Y^{\top} \underbrace{[id]_{YX}^{\top} \mathbf{B} [id]_{YX}}_{\mathbf{B'}} [\mathbf{u}]_Y$ □

Věta 14.12 (Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem)**.** *Nechť V je prostor konečné dimenze nad $\mathbb{R}$ a $g : V \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Potom existuje báze X prostoru V taková, že matice $\mathbf{B}$ formy g vůči bázi X je diagonální a $b_{ii} \in \{-1; 0; 1\}$. Navíc, počet kladných a počet záporných prvků na diagonále nezávisí na volbě X a je pro všechny báze stejný.*

Důkaz. Dokážeme nejprve existenci báze, která splňuje výše uvedené podmínky. Nechť X_0 je libovolná báze prostoru V a $\mathbf{B_0}$ je reálná symetrická matice. Potom existuje unitární matice $\mathbf{R}$ taková, že $\mathbf{R^{-1}BR} = \mathbf{D} = \mathbf{R}^{\top}\mathbf{B_0}\mathbf{R}$. Čili, je-li matice $\mathbf{R}$ matice přechodu od X_1 k X_0, potom je matice formy g vůču X_1 diagonální ($\mathbf{D}$).

Definujme diagonální matici $\widetilde{\mathbf{D}}$ následovně:

$$\widetilde{d}_{ii} = \begin{cases} \sqrt{|d_{ii}|} & d_{ii} \neq 0 \\ 1 & d_{ii} = 0 \end{cases}$$

Potom $\mathbf{D} = \widetilde{\mathbf{D}}^{\top} \mathbf{B} \widetilde{\mathbf{D}}$, kde $\mathbf{B}$ je hledaná matice formy g. Platí:

$$b_{ii} = \begin{cases} 1 & d_{ii} > 0 \\ -1 & d_{ii} < 0 \\ 0 & d_{ii} = 0 \end{cases}$$

Pokud použijeme $\widetilde{\mathbf{D}}$ jako matici přechodu od X_2 k X_1, tak potom X_2 je hledaná báze.

Dokažme nyní druhou část věty, t.j. že počet kladných a záporných prvků na diagonále nezávisí na volbě báze. Nechť $X = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ a $Y = \{\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}\}$ jsou dvě různé báze prostoru X takové, že příslušné matice formy g jsou tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Potom:

i. Počty nul se rovnají.

Platí $\mathbf{B} = [id]_{XY}^{\top} \mathbf{B}'[id]_{XY}$, čili $\operatorname{rank}(\mathbf{B}) = \operatorname{rank}(\mathbf{B}')$. Dále:

$$(\#0 \text{ v } \mathbf{B}) = n - \operatorname{rank}(\mathbf{B}) = n - \operatorname{rank}(\mathbf{B}') = (\#0 \text{ v } \mathbf{B}')$$

ii. Počty jedniček se rovnají.

Definujme $n^g = \operatorname{rank}(\mathbf{B}) = \#1 + \# - 1$. Víme, že

$$g(\mathbf{u}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - x_{n^g}^2,$$

pokud $[\mathbf{u}]_X = (x_1, \ldots, x_n)^{\top}$. Tedy $r = \#1$ v $\mathbf{B}$.

Podobně:

$$g(\mathbf{u}) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - y_{n^g}^2,$$

pokud $[\mathbf{u}]_Y = (y_1, \ldots, y_n)^{\top}$. Tedy $s = \#1$ v $\mathbf{B}'$.

Nechť dále, pro spor $r \neq s$, bez újmy na obecnosti, $r > s$. Vezmu netriviální vektor $\mathbf{z}$ z $\operatorname{span}(\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\}) \cap \operatorname{span}(\{\mathbf{w_{s+1}}, \ldots, \mathbf{w_n}\})$. Takový vektor $\mathbf{z}$ určitě existuje, jelikož

$$\dim(\operatorname{span}(\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\})) + \dim(\operatorname{span}(\{\mathbf{w_{s+1}}, \ldots, \mathbf{w_n}\})) = r + r - s > n = \dim(V)$$

Potom ale

$$g(\mathbf{z}) = \begin{cases} > 0 & \text{pokud některá z prvních } r \text{ souřadnic } [\mathbf{z}]_X \text{ je netriviální a zbytek jsou nuly,} \\ \leq 0 & \text{prvních } s \text{ souřadnic } [\mathbf{z}]_Y \text{ je nulových.} \end{cases}$$

Dostali jsme spor.

□

Definice 14.13. Nechť X je báze prostoru V taková, že matice $\mathbf{B}$ formy g vůči bázi X je diagonální a $b_{ii} \in \{-1; 0; 1\}$. Potom trojici $(\# - 1, \#0, \#1)$ nazýváme signatura formy.